

DIPLOMARBEIT

*Das Cutoff-Phänomen in interagierenden Teilchensystemen*

Angefertigt am  
Institut für Angewandte Mathematik

Vorgelegt der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Mai 2011

Von

Tobias Polley

Aus  
Tübingen



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1	Zusammenfassung	7
2	English Summary	11
<b>3</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>13</b>
3.1	Abstände . . . . .	14
3.2	Eigenwerte und Spektrallücke . . . . .	16
3.3	Stoppszeiten . . . . .	16
3.4	Cutoff . . . . .	17
3.4.1	Beispiele und bisher bekannte Ergebnisse . . . . .	17
3.5	Graphenstruktur des Zustandsraumes . . . . .	19
3.6	Zeitstetigkeit . . . . .	19
3.7	$L^p(\pi)$ -Räume . . . . .	20
3.8	Logarithmische Sobolev-Ungleichungen . . . . .	20
3.9	Moderates Wachstum . . . . .	21
<b>II</b>	<b>Simple Exclusion Process</b>	<b>23</b>
4	Motivation	25
<b>5</b>	<b>Auf dem vollständigen Graphen</b>	<b>29</b>
5.1	Formale Definition . . . . .	29
5.2	Projektion auf das Bernoulli-Laplace-Diffusionsmodell . . . . .	30
5.3	Schranken an die Mischzeit . . . . .	31
5.4	TV-Cutoff: Position und Intervalllänge . . . . .	36
5.5	Stationäre Verteilung . . . . .	36
5.6	Eigenwerte . . . . .	37
5.7	Sep-Cutoff . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Auf allgemeinen Graphen</b>	<b>41</b>
6.1	Transitiver Zustandsraum . . . . .	41
6.2	Der Einfluß von $\mathcal{O}(1)$ Kanten . . . . .	42
6.3	Der Einfluß von $\mathcal{O}(n)$ Kanten . . . . .	42

## INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>7</b>	<b>Auf <math>(n - 3)/2</math> disjunkten Eulerzyklen</b>	<b>43</b>
7.1	Beweisidee . . . . .	43
7.2	Beweis für $k = 1$ . . . . .	44
7.3	Beweis für beliebiges $k \ll \sqrt{n}$ . . . . .	45
7.4	Mögliche Verallgemeinerungen . . . . .	54
<b>8</b>	<b>Ausblick</b>	<b>57</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>59</b>

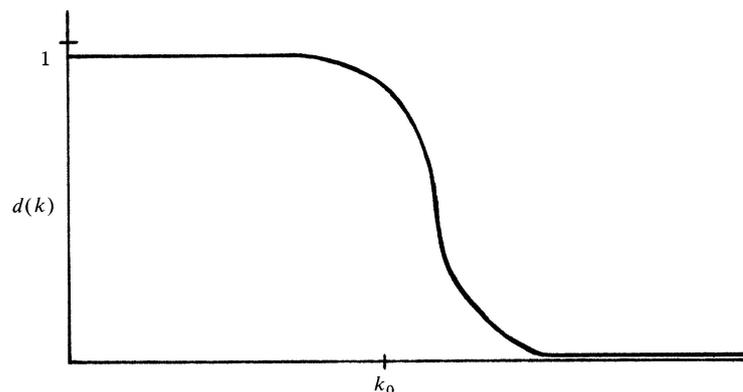
**Teil I.**

# **Einleitung**



# 1. Zusammenfassung

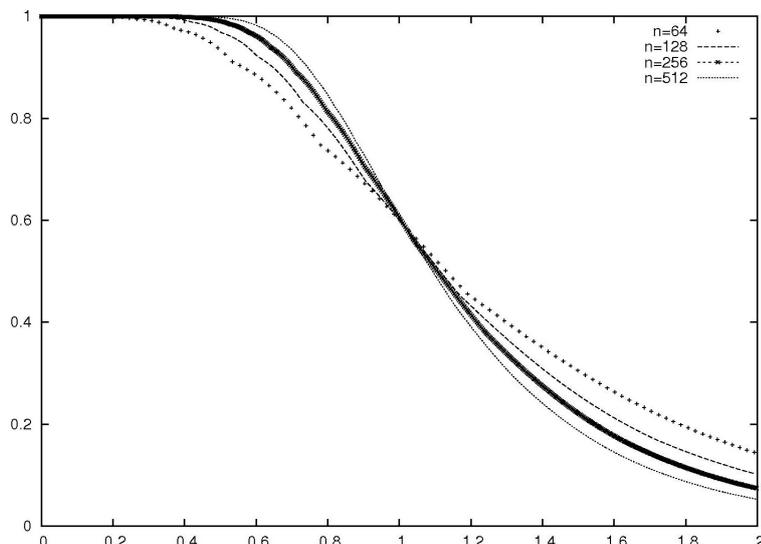
Der Begriff Cutoff-Phänomen beschreibt den abrupten Übergang bei der Konvergenz einiger ergodischer Markovketten gegen ihre stationäre Verteilung. In [18] wurde das Phänomen zuerst im Zusammenhang zufälligen Vertauschens von Karten in einem Stapel, also zufälligen Transpositionen auf der symmetrischen Gruppe, beobachtet und das gefeierte Ergebnis beschrieben, daß für ein Deck mit 52 Karten siebenmaliges Riffeln, auch bekannt als Bogenmischen, ausreicht. In [1] wurde das Phänomen benannt und mit der für ihn charakteristischen Verlaufskurve der *total variation distance*  $d(t)$  über der Zeit beschrieben:



**Abbildung 1.1:** Aus [1]: Die *total variation distance* des *random walk* entlang der Transpositionen auf der symmetrischen Gruppe über der Zeit

Bis heute ist allerdings selbst für Markovketten auf endlichen Zustandsräumen kein allgemeines „direktes“ Kriterium an das Modell, also die Übergangswahrscheinlichkeiten, bekannt, das das Auftreten des Cutoff-Phänomens charakterisieren würde. Ein *random walk* auf  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , dem Kreis, bei dem jeder Schritt auf  $\{-1, 0, 1\}$  gleichverteilt ist, weist zum Beispiel keinen Cutoff auf ([47]); ein *random walk* auf  $\{0, 1\}^d$ , dem Hyperwürfel, hingegen schon ([14]). Obwohl viele alltägliche Markovketten das Phänomen aufzeigen, erweist sich sein Nachweis jedoch als schwierig.

Dabei ist die explizite Angabe einer Mischzeit  $t_{\text{mix}}$ , also der Zeit, zu der  $d(t)$  unter  $\frac{1}{4}$  fällt, in Abhängigkeit von der Modellgröße  $n$  für viele Anwendungen extrem praktisch. Sie liefert zum Beispiel eine Abbruchbedingung für einen Approximationsalgorithmus, denn



**Abbildung 1.2:** Die *total variation distance* über der mit  $(\frac{1}{2}n \log k)^{-1}$  skalierten Zeit des *simple exclusion process* für  $k = \frac{n}{3}$

eine Stichprobe der Markovkette zur Zeit  $t_{\text{mix}}$  approximiert die gesuchte Lösung bis auf einen Fehler von  $\frac{1}{4}$ .

Ein solcher Algorithmus ist, vor allem im Vergleich mit anderen polynomiellen Lösungsalgorithmen zur selben Problemstellung, extrem kurz, sehr einfach zu realisieren und somit schnell implementiert und wenig fehleranfällig. Beispielsweise läßt sich das bekannte Rucksackproblem aus Operations Research (siehe etwa [31]) als einfacher *random walk* auf einem Hyperwürfel darstellen, der durch eine Hyperebene beschnitten wurde. Hier gilt  $t_{\text{mix}} \leq n^8$  (siehe [43]). Die obere Schranke an  $t_{\text{mix}}$  macht dabei den wesentlichen Faktor in der Laufzeit des Algorithmus aus. Darüber hinaus kann das Ergebnis bis zu einem beliebigen Fehler  $\epsilon$  durch  $\lceil \log_2 \epsilon^{-1} \rceil$ -fache Wiederholung verbessert werden. Das heißt, mit dem Algorithmus ist sogar die Konstruktion eines *fully polynomial randomized approximation scheme (FPRAS)* gelungen (siehe [27]). Da das Rucksackproblem zur Klasse der NP-harten Probleme zählt, haben wir also ein für diese Klasse optimales Approximationschema angegeben und das Problem als eines der „einfachsten“ unter ihnen charakterisiert (siehe etwa [33]).

Die Kenntnis der Cutoff-Position und -Intervalllänge liefert nun nicht nur eine obere Schranke an die Mischzeit, sondern auch eine Optimalitätsgarantie für sie. Während der Mischvorgang bis zum Beginn des Intervalls noch einen Fehler von  $1 - \epsilon$  macht, so ist er am Ende nur noch  $\epsilon$ .

Das Phänomen charakterisiert sich dadurch, daß die Intervalllänge von einer kleineren Größenordnung als die Position ist. Damit tritt die Verbesserung der Mischqualität relativ spontan ein. Während es entscheidend ist, den Mischvorgang nicht zu früh abubrechen, sind nach dem Cutoff nur noch geringfügige Verbesserungsschritte zu verzeichnen.

---

Bis heute wurde das Cutoff-Phänomen jedoch nur auf relativ wenigen Modellen nachgewiesen. Dies liegt unter anderem daran, daß es neben Kopplungen und starken Stationärzeiten relativ wenig Werkzeuge gibt, die dabei allgemein hilfreich sind. Die meisten Nachweise des Phänomens setzen eine sehr detaillierte Untersuchung der Markovkette voraus, einschließlich der Berechnung aller Eigenwerte und Eigenvektoren.

Zu den Modellen, für die das Phänomen nachgewiesen wurde, zählen zum Beispiel die symmetrische Gruppe ([1, 11, 18]), das Ehrenfest-Modell ([9, 11]), einige Fassungen des Metropolis-Algorithmus ([11]), endliche Gruppen vom Lie-Typ ([47]) und das Ising-Modell auf  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$  für festes  $d$  ([39]). Die wohl am häufigsten (etwa [17, 21]) und genauesten untersuchte Familie von Modellen bilden die sogenannten *birth-and-death*-Ketten, eindimensionale  $\pm 1$  *random walks* auf  $\{1, \dots, n\}$ . Für sie wurde  $\gamma_* t_{\text{mix}} \rightarrow \infty$  als Kriterium für das Auftreten des Cutoff-Phänomens nachgewiesen, wobei  $\gamma_*$  die Spektrallücke bezeichnet. Leider ist das Kriterium jedoch für allgemeine Modelle zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

Daneben gibt es einige probabilistische Aussagen, die Maße auf den Modellräumen verwenden. Beispielsweise erreichen die *meisten* Markovketten schon nach zwei Schritten ihre stationäre Verteilung ([1]), und *random walks* auf  $d$ -regulären Graphen weisen Cutoff *mit hoher Wahrscheinlichkeit* auf ([40]).

Bei der Familie der *simple exclusion processes* bewegen sich Teilchen entlang von Kanten eines Graphen. Diese Modelle haben eine Vielzahl von praktischen Anwendungen, von denen die bekannteste sicherlich die Bewegung von Gas-Molekülen in einem Raum ist. Mit diesen wurde der Prozeß seit geraumer Zeit beschrieben und untersucht, und die Ergebnisse sind vor allem im symmetrischen Fall recht umfassend.

Daß sich der *simple exclusion process* auf dem vollständigen Graphen durch eine Projektion auf das Bernoulli-Laplace-Diffusionsmodell untersuchen läßt, und somit wesentliche Eigenschaften der entstehenden *birth-and-death*-Kette übernommen werden können, ist schon in [19] erwähnt. Dazu zählt auch das Auftreten des Cutoff-Phänomens. Wir folgen jedoch [34], in dem die Autoren einen probabilistischen, in sich abgeschlossenen Beweis für Cutoff bezüglich der *total variation distance* geben, und die Position und Intervalllänge explizit berechnen.

In dieser Arbeit untersuchen wir den „nächst kleineren“ Fall des *simple exclusion process*, in dem der Graph nicht mehr ganz vollständig ist und der Zustandsgraph damit seine Transitivität verliert.

In Kapitel 3 definieren wir die meisten grundlegenden Begriffe, insbesondere Cutoff und geben in diesem Zusammenhang einen Überblick über die für unsere Arbeit relevanten, bekannten Ergebnisse. In Kapitel 4 beschreiben wir den *simple exclusion process* und listen ihn betreffende Cutoff-Aussagen auf. In Kapitel 5 vollziehen wir für den Fall des vollständigen Graphens die Projektion auf das Bernoulli-Laplace-Diffusionsmodell nach, zitieren Ergebnisse zum Cutoff bezüglich der *total variation distance*, und berechnen die explizite Position und Intervalllänge des Cutoffs bezüglich der *separation distance*. In Kapitel 6 formalisieren wir den „nächst kleineren“ interessanten Fall nach dem vollständigen Graphen. In Kapitel 7, dem Hauptteil dieser Arbeit, zeigen wir schließlich Cutoff bezüglich der *total variation distance* für diesen nächst kleineren Fall für  $k \ll \sqrt{n}$ ; dazu entwickeln

wir eine Methode, die die Entfernung der zwei Zufallsvariablen einer Kopplung mit Hilfe einer *birth-and-death*-Kette abschätzt. Kapitel 8 enthält einen Ausblick.

Alle verwendete Literatur ist im Literaturverzeichnis aufgelistet. Alle zitierten Sätze und Beweise sind mit einer Quellenangabe versehen.

Englische Fachbegriffe, für die es keine oder nur uneinheitlich oder selten verwendete, deutsche Entsprechungen gibt oder deren deutsches Äquivalent phonetisch weit vom Original entfernt ist, sind englisch belassen, um eine bessere Vergleichbarkeit mit der Literatur zu ermöglichen.

Ein ganz herzlicher Dank geht an alle, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. An Herrn Professor Eberle, meinen Betreuer, für sehr gute Ausbildung in Stochastik, an Alexander Hullmann für hilfreiche Gespräche, und an meine Eltern für den dargebotenen Rückhalt.

## 2. English Summary

The cutoff phenomenon describes an abrupt transition in the convergence of some ergodic Markov chains to their stationary distribution. In [18], the phenomenon was described for the first time for the application random exchanges within a deck of cards, that is random transpositions on the symmetric group. The celebrated result was stated: To mix a deck of 52 cards, no more than seven riffles are necessary. In [1], it got its name and was described with its characteristic graph displaying the total variation distance  $d(t)$  over time. (See figure 1.)

Until today, even for Markov chains on finite state spaces no direct criterion is known relating the model, that is the transition probabilities, to the occurrence or non-occurrence of cutoff. A random walk on  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , the cycle, for which each step is uniform on  $\{-1, 0, 1\}$ , shows no cutoff. A random walk on  $\{0, 1\}^d$ , the hypercube, does. Even though many everyday chains show the phenomenon, proving its occurrence turns out to be challenging. (See figure 2.)

The explicit statement of the mixing time  $t_{\text{mix}}$ , the time when  $d(t)$  drops below  $\frac{1}{4}$ , as a function of the model size  $n$  is extremely useful for many applications. For example, it provides a terminating condition for approximation algorithms, as a sample of the Markov chain at time  $t_{\text{mix}}$  is the solution up to an error of  $\frac{1}{4}$ .

Such an algorithm is, especially compared other polynomial solution algorithms for the same problem statement, extremely short, easy to realize and thereby quickly implemented and is quite failure-tolerant. For example, the well-known knapsack problem from Operations Research (see e.g. [31]) can be represented by a simple random walk on a hypercube that has been truncated by a hyperplane. For this case,  $t_{\text{mix}} \leq n^8$  (see [43]). The upper bound for  $t_{\text{mix}}$  is the crucial factor in the running time of the algorithm. Furthermore, the result can be improved up to an error of  $\epsilon$  by  $\lceil \log_2 \epsilon^{-1} \rceil$ -fold repetition. Therefore, with this algorithm, we have even constructed a fully polynomial randomized approximation scheme (FPRAS) (see [27]). Since the knapsack problem belongs to the class of NP-hard problems, we have thereby stated an optimal approximation scheme for this class and characterized the problem as one of the “easiest” among them (see [33]).

Knowledge of the cutoff location and window size not only gives an upper bound on the mixing time, but also a guarantee of optimality for it. While the mixing process has an error of  $1 - \epsilon$  up to the beginning of the window, after it the error is down to  $\epsilon$ .

The phenomenon is characterized by the fact that the window size is of smaller order than the location. Thereby the improvement of mixing quality happens quiet spontaneously. While it is vital not to abort mixing too early, after the cutoff only minor improvements can be noted.

Until today the cutoff phenomenon has been proven for only a few models. Among the reasons is that besides coupling and strong stationary times, there are but a few tools that are helpful in general. Most proofs of cutoff require a very detailed analysis of the Markov chain, including the calculation of all Eigenvalues and Eigenvectors.

Among the models, for which the phenomenon has been proven, are the symmetric group ([1, 11, 18]), the Ehrenfest-Urn ([9, 11]), several versions of the Metropolis-Algorithm ([11]), finite groups of Lie type ([47]) and the Ising-model on  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$  for fixed  $d$  ([39]). The most famous (see, for example, [17, 21]) and most researched family of models are what are known as birth-and-death-chains, one dimensional  $\pm 1$  random walks on  $\{1, \dots, n\}$ . For them, the criterion  $\gamma_\star t_{\text{mix}} \rightarrow \infty$  has been proven, where  $\gamma_\star$  is the spectral gap. Unfortunately, for more general models, this criterion is still necessary, but not sufficient.

Furthermore, there are a few probabilistic results requiring measures on model spaces. For example *most* Markov chains reach their stationarity after two steps ([1]). And random walks on  $d$ -regular graphs exhibit cutoff *with high probability* ([40]).

In the family of simple exclusion processes, particles move along edges of a graph. These models have a multitude of applications, most famous surely the movement of gaseous particles in a closed space. With these the process has long been described and researched, and the results, especially for the symmetric case, are quite comprehensive.

The simple exclusion process on a complete graph may be investigated using a projection onto the Bernoulli Laplace diffusion model and vital properties can be inferred from the resulting birth-and-death-chain. This has been mentioned in [19]. Among those properties is the occurrence of cutoff. We, however, follow [34], where the authors give a probabilistic, self-contained proof of total variation cutoff and explicitly state the location and window size.

In this thesis, we investigate the “next smaller” case of the simple exclusion process, where the graph is not entirely complete anymore and the state graph thereby loses its transitivity.

In chapter 3, we define the basic terms and notions, in particular cutoff and give a summary of the known results which are relevant to this thesis. In chapter 4 we define the simple exclusion process and list propositions concerning its cutoff. In chapter 5 we follow the case of the complete graph being projected onto the Bernoulli Laplace diffusion model, cite results regarding total variation cutoff and explicitly compute the location and window size of separation cutoff. In chapter 6 we define the “next smaller” interesting case where one Eulerian cycle has been removed. In chapter 7, the main part of this thesis, we prove total variation cutoff developing a method which estimates the distance of the two random variables of a coupling by using a birth-and-death-chain. Chapter 8 we review the work and pose questions which might stimulate further research in this area.

All literature used is listed at the end of this thesis. All quoted propositions and proofs are annotated with their source.

### 3. Grundlagen

Eine endliche Markovkette ist ein Prozeß, der sich auf einem endlichen Zustandsraum  $\Omega$  bewegt. Dabei wird die auf  $x \in \Omega$  folgende Position entsprechend einer festen Verteilung  $P(x, \cdot)$  gewählt. Formaler ist eine **zeit-diskrete Markovkette mit endlichem Zustandsraum  $\Omega$  und Übergangsmatrix  $P$**  eine Folge von  $\Omega$ -wertigen Zufallsvariablen  $(X_0, X_1, \dots)$ , die für alle  $t \in \mathbb{N}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}\} \\ &= \mathbb{P}\{X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_0 = x_0\} \\ &= P(x_{t-1}, x_t), \end{aligned}$$

die sogenannte **Markoveigenschaft**, erfüllen. Sofern nicht anders erwähnt, sind alle Markovketten im folgenden zeit-diskret. Der Zustandsraum ist im folgenden immer endlich.

Die Matrix  $P$  beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeit und ist **stochastisch**, d.h. für alle  $x \in \Omega$  gilt

$$\sum_{y \in \Omega} P(x, y) = 1.$$

Zur kürzeren Beschreibung sagen wir auch, die Übergangsmatrix habe die Eigenschaften ihrer Markovkette, die dann implizit gemeint ist. Eine Markovkette heißt **irreduzibel**, wenn es für alle  $x, y \in \Omega$  ein  $t \in \mathbb{N}$  gibt, so daß  $P^t(x, y) > 0$  ist.

Sie heißt **aperiodisch**, wenn  $\text{ggT}\{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\} = 1$  für alle  $x \in \Omega$  gilt. Um Periodizität zu vermeiden und somit Konvergenz zu erreichen, beschränkt man sich zum Teil auf **träge** Markovketten, also solche, für die für jedes  $x \in \Omega : P(x, x) \geq \frac{1}{2}$  gilt. Aus jeder Markovkette läßt sich mittels  $Q := \frac{I+P}{2}$  eine träge Version konstruieren: Die erwartete Konvergenzrate verschlechtert sich dabei im schlimmsten Fall um den Faktor 2.

Eine Verteilung  $\pi$  auf  $\Omega$  heißt **invariant**, wenn  $\pi = \pi P$  gilt. Ist die Markovkette irreduzibel, so gibt es ein eindeutiges  $\pi$ .

Die Markovkette  $(X_t)$  heißt **reversibel**, wenn es eine Verteilung  $\pi'$  auf  $\Omega$  gibt, so daß für alle  $x, y \in \Omega$  die sogenannte **Gleichung der detaillierten Balance**

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x)$$

gilt. Jedes solche  $\pi'$  ist invariant.

Ist  $P$  reversibel, so gilt für alle  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \in \Omega$

$$P(x_{i_1}, x_{i_2})P(x_{i_2}, x_{i_3}) \dots P(x_{i_k}, x_{i_1}) = P(x_{i_k}, x_{i_{k-1}})P(x_{i_{k-1}}, x_{i_{k-2}}) \dots P(x_{i_1}, x_{i_k}).$$

Ist  $P$  positiv, gilt auch die Rückrichtung.

Eine **Kopplung** von Markovketten mit **Übergangsmatrizen**  $P$  und  $Q$  ist ein Prozeß  $(X_t, Y_t)_{t=0}^\infty$ , so daß  $(X_t)$  eine Markovkette mit Übergangsmatrix  $P$  und  $Y$  eine Markovkette mit Übergangsmatrix  $Q$  ist.

Eine **Kopplung** von zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mu$  und  $\nu$  ist ein Prozeß  $(X_t, Y_t)_{t=0}^\infty$ , so daß die Randverteilung von  $X$   $\mu$  ist, und die von  $Y$   $\nu$ , d.h. die Kopplung erfüllt  $\mathbb{P}\{X = x\} = \mu(x)$  und  $\mathbb{P}\{Y = y\} = \nu(y)$ .

### 3.1. Abstände

Um nun von der Konvergenz einer Markovkette zur Zeit  $t$  mit  $t \rightarrow \infty$  sprechen zu können, muß zunächst der „Abstand“ zwischen zwei Verteilungen quantifiziert werden. Man betrachtet meistens eine der beiden folgenden Alternativen:

**Definition 3.1.** Die *total variation distance* zweier Verteilungen  $\mu$  and  $\nu$  auf  $\Omega$  ist

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} := \max_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Da unser  $\Omega$  endlich ist, gilt

$$\begin{aligned} \|\mu - \nu\|_{\text{TV}} &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(x) - \nu(x)| \\ &= \sum_{\substack{x \in \Omega \\ \mu(x) \geq \nu(x)}} (\mu(x) - \nu(x)) \\ &= \inf\{\mathbb{P}\{X \neq Y\} : (X, Y) \text{ Kopplung von } \mu \text{ und } \nu\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

**Satz 3.2** ([35]). *Ist  $P$  irreduzibel und aperiodisch mit invarianter Verteilung  $\pi$ , so gibt es  $\alpha \in (0, 1)$  und  $C > 0$ , so daß*

$$\max_{x \in \Omega} \|P^t(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{TV}} \leq C\alpha^t.$$

Dies berechtigt also, von Konvergenz der Verteilung der Markovkette zur Zeit  $t$  gegen  $\pi$  mit  $t \rightarrow \infty$  zu sprechen. Daher wird  $\pi$  auch die **stationäre Verteilung** genannt. Wir definieren

$$\pi_{\min} := \min_{x \in \Omega} \pi(x).$$

Wir setzen

$$d(t) := \max_{x \in \Omega} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} \quad (3.2)$$

sowie

$$\bar{d}(t) := \max_{x, y \in \Omega} \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{\text{TV}} \quad (3.3)$$

und somit gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$ .

Die zweite Alternative, den Abstand zu quantifizieren, ist die *separation distance*. Dabei ist zu beachten, daß sie weder symmetrisch noch eine Metrik zwischen zwei Verteilungen ist.

**Definition 3.3.** Die *separation distance* aus dem Zustand  $x$  ist

$$s_x(t) := \max_{y \in \Omega} \left( 1 - \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} \right),$$

und die der ganzen Kette

$$s(t) := \max_{x \in \Omega} s_x(t).$$

Es gilt nun

$$d(t) \leq \bar{d}(t) \leq 2d(t) \quad (3.4)$$

und

$$\bar{d}(s+t) \leq \bar{d}(s)\bar{d}(t) \quad (3.5)$$

und somit

$$d(ct) \leq \bar{d}(ct) \leq \bar{d}(t)^c \quad (3.6)$$

Da  $d(t)$  monoton fällt und man häufig an der Zeit interessiert ist, zu der  $d(t)$  zum ersten Mal einen bestimmten Wert unterschreitet, definiert man die Umkehrfunktion, die sogenannte **Mischzeit**, von  $d$  als

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) := \inf\{t : d(t) \leq \epsilon\}.$$

Da mit (3.6) nun

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq \lceil \log_2 \epsilon^{-1} \rceil t_{\text{mix}}$$

gilt, genügt in der Praxis häufig die Angabe eines einzigen Wertes von  $t_{\text{mix}}(\epsilon)$ , nämlich

$$t_{\text{mix}} := t_{\text{mix}}\left(\frac{1}{4}\right).$$

Analog zu  $t_{\text{mix}}$  definiert man für die *separation distance* die **Separationszeit**:

$$t_{\text{sep}}(\epsilon) := \inf\{t : s(t) \leq \epsilon\}$$

$$t_{\text{sep}} := t_{\text{sep}}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Weiterhin gilt

$$d(t) \leq s(t).$$

**Bemerkung 3.4.** Während die *total variation distance* den Term

$$\frac{1}{2} \left| 1 - \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} \right|$$

über alle  $y \in \Omega$  mit  $\pi(y)$  gewichtet summiert, betrachtet die *separation distance* das Maximum

$$\max_{y \in \Omega} \left( 1 - \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} \right)$$

für ein einzelnes  $y \in \Omega$ . Die *separation distance* hängt also im Vergleich zur *total variation distance* wesentlich mehr von den lokalen Eigenschaften der Markovkette ab.

### 3.2. Eigenwerte und Spektrallücke

Ist  $P$  irreduzibel und reversibel, so sind die Eigenwerte reell. Wir numerieren sie in absteigender Reihenfolge:

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \lambda_{|\Omega|-1} \geq -1$$

$$\lambda_* := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } P, \lambda \neq 1\}$$

Mit  $\gamma_* := 1 - \lambda_*$  bezeichnen wir die **absolute Spektrallücke**. Ist  $P$  aperiodisch und irreduzibel, so ist  $\gamma_* > 0$ . Die **Spektrallücke** definieren wir als  $\gamma := 1 - \lambda_2$ , die **Relaxationszeit** als  $t_{\text{rel}} := \frac{1}{\gamma_*}$ .

Damit liefern die Theoreme 12.3 und 12.4 aus [35] die ersten Schranken für die Mischzeit: Ist  $P$  reversibel, irreduzibel und aperiodisch, so gilt zunächst  $\frac{1}{2}|\lambda_*|^t \leq d(t) \leq \pi_{\min}^{-1} \exp(-\gamma_* t)$ , und so

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq \log\left(\frac{1}{\epsilon \pi_{\min}}\right) t_{\text{rel}},$$

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq (t_{\text{rel}} - 1) \log\left(\frac{1}{2\epsilon}\right),$$
(3.7)

und auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(t)^{\frac{1}{t}} = \lambda_*.$$

### 3.3. Stoppzeiten

Für eine Folge  $(X_t)$  von  $\Omega$ -wertigen Zufallsvariablen heißt eine  $\{0, 1, \dots, \infty\}$ -wertige Zufallsvariable  $\tau$  eine **Stoppzeit bezüglich**  $(X_t)$ , wenn es für alle  $t \in \{0, 1, \dots\}$  eine Menge  $B_t \subset \Omega^{t+1}$  gibt, so daß

$$\{\tau = t\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_t) \in B_t\}$$

gilt. Eine Stoppzeit  $\tau_A := \min\{t \geq 0 : X_t \in A\}$  heißt **Trefferzeit von**  $A$ .

Ist eine Folge unabhängiger, gleichverteilter Zufallsvariablen  $(Z_t)$  und eine Abbildung  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so daß

$$X_0 = x \quad \text{und} \quad X_t = f(X_{t-1}, Z_t)$$

eine Folge  $(X_t)$  von  $\Omega$ -wertigen Zufallsvariablen definiert, so heißt eine Stoppzeit  $\tau$  bezüglich  $(Z_t)$  eine **randomisierte Stoppzeit bezüglich**  $(X_t)$ .

**Definition 3.5.** Eine **strong stationary time** einer Markovkette  $(X_t)$  mit stationärer Verteilung  $\pi$  ist eine randomisierte Stoppzeit  $\tau(x)$  bezüglich  $(X_t)$ , so daß mit  $X_0 = x$

$$\mathbb{P}\{\tau = t, X_\tau = y\} = \mathbb{P}\{\tau = t\} \pi(y)$$

für alle  $t \in \mathbb{N}$  und  $y \in \Omega$  gilt.

**Definition 3.6.** Ein Zustand  $y \in \Omega$  ist ein **Haltezustand** für eine Stoppzeit  $\tau(x)$ , wenn

$$X_t = y \Rightarrow \tau \leq t$$

für alle  $t \in \mathbb{N}$  gilt.

**Satz 3.7** ([2]). Ist  $\tau(x)$  eine strong stationary time bezüglich  $(X_t)$  und  $s_x(t)$  die separation distance aus dem Zustand  $x$ , so gilt

$$s_x(t) \leq \mathbb{P}_x\{\tau > t\}.$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn es einen Haltezustand bezüglich  $\tau$  gibt.

### 3.4. Cutoff

Gegeben sei eine Folge  $(X_t^{(n)})$  von Markovketten ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ihre Mischzeiten seien mit  $t_{\text{mix}}^{(n)}(\epsilon)$  und ihre total variation distances mit  $d_n(t)$  bezeichnet. Ihre Separationszeiten seien mit  $t_{\text{sep}}^{(n)}(\epsilon)$  und ihre separation distances mit  $s_n(t)$  bezeichnet.

**Definition 3.8.** Die Folge weist **total variation cutoff**, kurz **TV-Cutoff**, auf, wenn für alle  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{\text{mix}}^{(n)}(\epsilon)}{t_{\text{mix}}^{(n)}(1 - \epsilon)} = 1$$

gilt. Die dazugehörige **Intervalllänge** ist  $\{w_n\}$ , falls  $w_n = o(t_{\text{mix}}^{(n)})$  und

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} d_n\left(t_{\text{mix}}^{(n)} + \alpha w_n\right) &= 1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n\left(t_{\text{mix}}^{(n)} + \alpha w_n\right) &= 0. \end{aligned}$$

**Definition 3.9.** Die Folge weist **TV-Pre-Cutoff** auf, wenn

$$\sup_{0 < \epsilon < 1/2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{\text{mix}}^{(n)}(\epsilon)}{t_{\text{mix}}^{(n)}(1 - \epsilon)}$$

gilt.

TV-Pre-Cutoff ist offensichtlich eine schwächere Bedingung als TV-Cutoff. Ein Beispiel dafür, daß TV-Cutoff nicht TV-Pre-Cutoff impliziert, zitieren wir im folgenden Abschnitt.

**Definition 3.10.** Die Folge weist **separation cutoff**, kurz **Sep-Cutoff** auf, wenn für alle  $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{\text{sep}}^{(n)}(\epsilon)}{t_{\text{sep}}^{(n)}(1 - \epsilon)} = 1$$

gilt.

#### 3.4.1. Beispiele und bisher bekannte Ergebnisse

**Definition 3.11.** Eine Markovkette auf  $\Omega$  heißt *simple random walk*, wenn es auf  $\Omega$  eine symmetrische Relation  $\sim$  gibt und  $P(x, y) > 0$  genau dann, wenn  $x \sim y$  gilt. Er heißt *symmetric*, falls

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|\{z: z \sim x\}|} & \text{falls } x \sim y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Definition 3.12.** Eine Markovkette auf  $\Omega = \{0, \dots, m\}$  heißt **birth-and-death**-Kette, wenn  $P(x, y) \neq 0 \Rightarrow (x - y) \in \{-1, 0, 1\}$  für alle  $x, y \in \Omega$  gilt.

Jede *birth-and-death*-Kette ist reversibel. Eine *birth-and-death*-Kette hat einen **Drift** von  $\beta$  in Richtung von  $m$ , wenn  $\beta = P(x, x + 1) - \frac{1}{2}$  für alle  $x \in \{0, \dots, m - 1\}$  gilt.

**Satz 3.13** ([17]). Sei  $(X_t^{(n)})$  eine Folge von trägen *birth-and-death*-Ketten, jeweils mit Zustandsraum  $\Omega^{(n)} = \{0, \dots, m_n\}$  und Übergangsmatrix  $P^{(n)}$ . Seien  $\lambda_i^{(n)} \in [0, 2]$ ,  $i \in \{0, \dots, m_n\}$ , die Eigenwerte des Generators in aufsteigender Reihenfolge. Sei

$$\lambda^{(n)} := \lambda_1^{(n)} \tag{3.8}$$

und

$$t^{(n)} := \sum_{i=1}^{m_n} (\lambda_i^{(n)})^{-1}. \tag{3.9}$$

Für alle  $x \in \{0, \dots, m_n - 1\}$  und alle  $n$  gelte

$$P^{(n)}(x, x + 1) + P^{(n)}(x + 1, x) \leq 1.$$

Dann weist  $(X_t^{(n)})$  genau dann *Sep-Cutoff* auf, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n t_n = \infty.$$

**Satz 3.14** ([21]). Sei  $(X_t^{(n)})$  eine Folge von trägen, irreduziblen *birth-and-death*-Ketten. Sei  $(t_{mix}^{(n)})$  die dazugehörige Folge von Mischzeiten und  $(\gamma^{(n)})$  dazugehörige Folge von Spektrallücken. Die Folge  $(X^{(n)})$  weist *TV-Cutoff* genau dann auf, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{mix}^{(n)} \gamma^{(n)} = \infty.$$

Die Intervalllänge ist dabei höchstens

$$\sqrt{t_{mix}^{(n)} (\gamma^{(n)})^{-1}}.$$

**Definition 3.15.** Eine Markovkette auf  $\Omega = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  heißt Markovkette auf einem **Kreis**, wenn  $P(x, y) \neq 0 \Rightarrow (x - y) \in \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  für alle  $x, y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  gilt.

Der folgende Satz gibt ein erstes Beispiel für ein Modell, auf dem kein Cutoff auftritt. Der Beweis in [47] verwendet die Eigenwerte, Trigonometrie und knappe Abschätzungen.

**Satz 3.16** ([47]). Der *random walk* auf dem Kreis mit  $P(x, y) = \frac{1}{3}$  für alle  $x, y \in \Omega$  mit  $(x - y) \in \{-1, 0, 1\}$  weist keinen Cutoff auf.

Unter anderem die Sätze 3.13 und 3.14 bewegten Y. Peres zur Formulierung der Hypothese (siehe [44]),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{mix}^{(n)} \gamma^{(n)} = \infty \tag{3.10}$$

als allgemeines Kriterium für TV-Cutoff anzunehmen, nachdem dies in vielen praktischen Beispielen zutraf und eine notwendige Bedingung für Cutoff darstellt. D. Aldous präsentierte darauf ein Gegenbeispiel, das (3.10) erfüllt und TV-Pre-Cutoff, aber keinen TV-Cutoff aufweist: Die in [35] beschriebene, einfachere Variante besteht aus einer *birth-and-death*-Kette der Länge  $5n$ , deren eines Ende  $e$  auf einem Kreis der Größe  $3n$  liegt. Dabei hat die *birth-and-death*-Kette einen Drift von  $\frac{1}{6}$  in Richtung des Kreises. Von  $e$  aus in eine Richtung entlang des Kreises haben  $2n$  Knoten ebenfalls einen Drift von  $\frac{1}{6}$ , die  $n$  Knoten in der anderen Richtung von  $e$  aus einen Drift von  $\frac{3}{10}$ .

Entsprechend zu Abschnitt 3.4 kann der  $L^p$ -Cutoff mit  $\|\cdot\|_p$  als Abstand (siehe Abschnitt 3.7) definiert werden. In [10] zeigen die Autoren, daß der  $L^p$ -Cutoff für  $1 < p \leq \infty$  bei reversiblen Markovketten genau dann auftritt, wenn eine (3.10) entsprechende Bedingung erfüllt ist, man nämlich in (3.10) die TV-Mischzeit durch die  $L^p$ -Mischzeit ersetzt. Diese Tatsache ist jedoch eher von theoretischem Interesse, da die  $L^p$ -Norm keine Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation hat.

### 3.5. Graphenstruktur des Zustandsraumes

Alle betrachteten Graphen in dieser Arbeit sind ungerichtet und endlich, bestehen also aus einer endlichen Menge  $V$  von **Knoten** und einer symmetrischen Relation  $E \subseteq V \times V$  von **Kanten**, die wir als Menge von Mengen von Knoten auffassen wollen; bezeichnet  $\mathcal{P}$  also die Bildung der Potenzmenge, ist  $E \subset \mathcal{P}(V)$ . In einem **Graphen**  $G = (V, E)$  definieren wir für alle  $x, y \in V$  ihren **Abstand**  $\text{dist}_G(x, y)$  als die minimale Anzahl von Kanten eines  $x$ - $y$ -Pfades

$$\{\{x, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, y\}\} \subseteq E.$$

Die **Nachbarn**  $N(x)$  eines Knoten  $x \in V$  sind durch  $N(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E, x \neq y\}$  gegeben. Der **Grad** eines Knoten ist  $\text{deg}(x) := |N(x)|$ .

Die Übergangsmatrix  $P$  induziert auf  $\Omega$  eine **Graphenstruktur**  $G_\Omega = (V_\Omega, E_\Omega)$ , definiert durch  $V_\Omega := \Omega$  und

$$E_\Omega := \{\{x, y\} : P(x, y) + P(y, x) > 0\}.$$

Wir bezeichnen den maximalen Abstand zweier Zustände  $x, y \in \Omega$  mit  $\beta$ :

$$\beta := \max_{x, y \in \Omega} \text{dist}_{G_\Omega}(x, y).$$

### 3.6. Zeitstetigkeit

Zu einer zeit-diskreten Markovkette mit Übergangsmatrix  $P$  ist der **Kern** der mit ihr assoziierten **zeit-stetigen Markovkette** gegeben durch

$$H_t := e^{-t(I-P)}. \tag{3.11}$$

Es gilt

$$H_t(x, y) = e^{-t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i P^i(x, y)}{i!}.$$

Die zeit-stetige Variante ist ein Prozeß, der die gleichen Sprünge wie die zeit-diskrete Variante, also gemäß der Übergangsmatrix  $P$ , vollzieht, jedoch nach unabhängigen, Poisson(1)-verteilten Wartezeiten.

Die zeit-stetige Variante ist teilweise leichter zu analysieren. Daher sind einige Aussagen im folgenden auf sie beschränkt. Aussagen über zeit-diskrete Markovketten lassen sich jedoch immer mittels (3.11) auf den zeit-stetigen Fall übertragen.

Die Definitionen von  $d(t)$ ,  $\bar{d}(t)$ ,  $s(t)$ , die der Mischzeit, der Separationszeit und die der Cutoff-Varianten übertragen sich auf den zeit-stetigen Fall, indem man  $P^t$  durch  $H_t$  ersetzt.

Sofern nicht anders erwähnt, sind alle Markovketten im folgenden zeit-diskret.

### 3.7. $L^p(\pi)$ -Räume

Ist eine Markovkette  $(X_t)$  mit Zustandsraum  $\Omega$  und der stationären Verteilung  $\pi$  gegeben, so definieren wir  $L^p(\pi)$  als den Raum der Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , für die

$$\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^p \pi(x) < \infty$$

gilt, und versehen ihn mit der Norm

$$\|f\|_p := \left( \sum_{x \in \Omega} |f(x)|^p \pi(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Entsprechend definieren wir  $L^\infty(\pi)$  mit

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Offensichtlich gilt

$$\left\| \frac{\mu}{\pi} - 1 \right\|_1 = 2 \|\mu - \pi\|_{\text{TV}}.$$

Das Skalarprodukt auf  $L^2(\pi)$  sei durch

$$\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_\pi := \sum_{x \in \Omega} f(x) \overline{g(x)} \pi(x)$$

gegeben.

### 3.8. Logarithmische Sobolev-Ungleichungen

Sei für den Rest dieses Kapitels sei  $(X_t)$  eine zeit-stetige, irreduzible Markovkette mit Zustandsraum  $\Omega$ , Kern  $H_t$  zur Übergangsmatrix  $P$  und mit stationärer Verteilung  $\pi$ .

Die mit  $(X_t)$  assoziierte **Dirichlet-Form** ist für  $f, g \in L^2(\pi)$  definiert durch

$$\mathcal{E}(f, g) := \Re(\langle (I - P)f, g \rangle),$$

wobei  $\Re(c)$  ein  $c \in \mathbb{C}$  auf seinen reellen Anteil abbildet. Mit der Notation

$$\begin{aligned} \pi(f) &:= \sum_{x \in \Omega} f(x) \pi(x) \\ \text{Var}_\pi(f) &:= \sum_{x \in \Omega} |f(x) - \pi(f)|^2 \pi(x) \end{aligned}$$

kann der Begriff der Spektrallücke verallgemeinert werden: Bisher ist sie nur im Falle reversibler Markovketten, also wenn die Eigenwerte reell sind, definiert. Allgemeiner gilt

$$\gamma := \min \left\{ \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\text{Var}_\pi(f)} : f \in L^2(\pi), \text{Var}_\pi(f) \neq 0 \right\}. \quad (3.12)$$

Wie (3.7) aus der Ungleichung  $\|H_t f - \pi(f)\|_2^2 \leq e^{-2\gamma t} \text{Var}_\pi(f)$  für alle  $f \in L^2(\pi)$  abgeleitet wurde, können nun auch stärkere Schranken abgeleitet werden, wenn man in (3.12) die Varianz durch

$$\mathcal{L}(f) := \sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2 \log \left( \frac{|f(x)|^2}{\|f\|_2^2} \right) \pi(x)$$

ersetzt. Das Äquivalent der Spektrallücke für  $\mathcal{L}$  definieren wir wie folgt:

**Definition 3.17.** Die logarithmische Konstante  $\alpha = \alpha(P)$  ist definiert als

$$\alpha := \min \left\{ \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\mathcal{L}(f)} : \mathcal{L}(f) \neq 0 \right\}.$$

Sie ist also die größte Konstante  $c$ , so daß die **logarithmische Sobolev-Ungleichung**

$$c\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{E}(f, f)$$

erfüllt ist. Es gilt  $2\alpha \leq \gamma$  und entsprechend zu (3.7)

$$2\|H_t - \pi\|_{\text{TV}}^2 \leq \left( \log \frac{1}{\pi_{\min}} \right) e^{-2\alpha t}. \quad (3.13)$$

### 3.9. Moderates Wachstum

Sei  $(X_t)$  weiterhin obige Markovkette. Wir definieren für  $x \in \Omega$  und  $r \in \mathbb{N}$

$$V(x, r) := \pi(\{y : \text{dist}_{G_\Omega}(x, y) \leq r\}). \quad (3.14)$$

**Definition 3.18.** Im diesem Kontext hat die Markovkette  $(X_t)$   **$(M, d)$ -moderates Wachstum**, wenn für alle  $x \in \Omega$  und  $r \leq \beta$  gilt:

$$V(x, r) \leq \frac{1}{M} \left( \frac{r+1}{\beta} \right)^d.$$

Wir definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q : E_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Q(\{x, y\}) := \frac{1}{2}(P(x, y)\pi(x) + P(y, x)\pi(y)),$$

und somit gilt

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{\{x, y\} \in E_\Omega} |f(x) - f(y)|^2 Q(\{x, y\}).$$

**Definition 3.19.** In diesem Kontext erfüllt die Markovkette  $(X_t)$  eine **lokale Poincaré-Ungleichung mit Konstante**  $a > 0$ , wenn für alle Funktionen  $f \in L^2(\pi)$  und  $r \leq \beta$

$$\|f - f_r\|_2^2 \leq ar^2 \mathcal{E}(f, f)$$

gilt, wobei

$$f_r(x) := \frac{1}{V(x, r)} \sum_{y: d(x, y) \leq r} f(y) \pi(y).$$

**Lemma 3.20** ([16]). Für alle  $x, y \in \Omega$ ,  $x \neq y$ , sei  $\beta(x, y)$  ein fester  $x$ - $y$ -Pfad in  $G_\Omega$ . Dann gilt

$$\|f - f_r\|_2^2 \leq \eta(r) \mathcal{E}(f, f)$$

mit

$$\eta(r) := \max_{e \in E_\Omega} \left\{ \frac{2}{Q(e)} \sum_{\substack{x, y: \text{dist}(x, y) \leq r \\ e \in \beta(x, y)}} |\beta(x, y)| \frac{\pi(x)\pi(y)}{V(x, r)} \right\}$$

**Theorem 3.21** ([15, 16]). Die Markovkette  $(X_t)$  habe  $(M, d)$ -moderates Wachstum und erfülle eine lokale POINCARÉ-Ungleichung mit Konstante  $a > 0$ . Dann gilt  $\gamma \geq 1/a\beta^2$  und die Markovkette erfüllt die NASH-Ungleichung

$$\|f\|_2^{2(1+2/d)} \leq C \left( \mathcal{E}(f, f) + \frac{1}{a\gamma^2} \|f\|_2^2 \right) \|f\|_1^{4/d}$$

mit  $C := (1 + 1/d)^2 (1 + d)^{2/d} M^{2/d} a \beta^2$ . Somit gilt für alle  $c > 0$  und  $t = a\beta^2(1 + c)$

$$\left\| \frac{H_t(x, \cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_2 \leq B e^{-c}$$

mit  $B = (e(1 + d)M)^{1/2} (2 + d)^{d/4}$ . Die logarithmische Sobolev Konstante erfüllt  $\alpha \geq \epsilon/\beta^2$  mit  $\epsilon^{-1} = 2a(2 + \log B)$ .

Weiterhin gibt es Konstanten  $c_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , die nur von  $M$ ,  $d$  und  $a$  abhängen, für die gilt:  $\gamma \leq c_1/\beta^2$ ,  $\alpha \leq c_2/\beta^2$  und, falls die Markovkette reversibel ist,

$$c_3 e^{c_4 t/\beta^2} \leq d(t) \leq c_5 e^{-c_6 t/\beta^2}.$$

Teil II.

## **Simple Exclusion Process**



## 4. Motivation

Beim *simple exclusion process* bewegen sich  $k$  Teilchen auf einem Graphen  $G = (V, E)$ . In einer **Konfiguration** befindet sich jedes Teilchen auf seinem eigenen Knoten. In jedem Schritt wird eine Kante des Graphen zufällig gleichverteilt ausgewählt und der Inhalt der beiden anliegenden Knoten vertauscht. Sind beide Knoten unbesetzt, oder beide besetzt, passiert nichts; sonst bewegt sich ein Teilchen.

Da sich unter anderem alle *simple symmetric random walks* ( $k := 1$ ) so modellieren lassen, ist dieses Modell extrem flexibel und es gibt eine Vielzahl von untersuchten Spezialfällen.

Trotzdem ist selbst unter der Einschränkung  $k = 1$  bisher kein allgemeines Cutoff-Kriterium bekannt. — Ist  $G$  beispielsweise ein Kreis, so tritt kein Cutoff auf (siehe Satz 3.16). Ist  $G$  die symmetrische Gruppe, also  $V = S_n$  und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich durch eine Transposition unterscheiden, so tritt TV-Cutoff ([18]) und Sep-Cutoff ([47]) auf.

Ein Graph heißt  **$d$ -regulär**, wenn an jedem Knoten genau  $d$  Kanten anliegen. Ist  $G$   $d$ -regulär, mit  $d \geq 3$ , so weist der *random walk* das TV-Cutoff-Phänomen mit hoher Wahrscheinlichkeit auf, gleichverteilt über alle solchen Graphen gemessen ([40]).

Um die Analyse in Spezialfällen zu vereinfachen, versucht man häufig, den Konfigurationsraum  $\Omega$  und die Übergangsmatrix  $P_2$  möglichst einfach zu halten oder durch eine Projektion zu reduzieren. Beim allgemeinen *simple exclusion process* ist  $\Omega = \binom{V}{k}$ , also die Menge aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $V$ .

Zu einem gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  ohne *loops*, also  $\{x, y\} \in E \Rightarrow x \neq y$ , ist die in Abschnitt 3.5 beschriebene Graphenstruktur auf  $\Omega$  durch die Bewegung eines einzelnen der  $k$  Teilchen entlang einer Kante aus  $E$  also wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 V_\Omega &= \Omega = \binom{V}{k} \\
 &= \{x \in \mathcal{P}(V) : |x| = k\}, \\
 E_\Omega &= \{\{x, y\} \in \Omega^2 : P_2(x, y) > 0, x \neq y\} \\
 &= \{\{x, y\} \in \mathcal{P}(V)^2 : |x| = |y| = k, |x \cap y| = k - 1, (x \cup y) \setminus (x \cap y) \in E\}, \\
 G_\Omega &= (V_\Omega, E_\Omega).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Vom *simple exclusion process* findet man in der Literatur unterschiedliche Varianten:

1. Pro Zeiteinheit wird ein Teilchen proportional zum Grad des von ihm besetzten Knotens ausgewählt, und auf einen zufällig gleichverteilt gewählten Nachbarknoten bewegt, sofern dieser frei ist.

2. Pro Zeiteinheit wird eine Kante gleichverteilt ausgewählt und der Inhalt des Knotens vertauscht. (Dies wurde zu Beginn des Kapitels beschrieben.)
3. Pro Zeiteinheit werden zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V$  gleichverteilt gewählt. Ist  $\{v_1, v_2\} \in E$ , so wird der Inhalt beider Knoten vertauscht.

Wir werden im folgenden die Varianten mit **SEP-1**, **SEP-2** und **SEP-3** bezeichnen. In den folgenden Kapiteln verwenden wir SEP-3, soweit nicht anders angegeben.

Seien  $P_1, P_2$  und  $P_3$  die Übergangsmatrizen der jeweiligen Markovketten. Dann gilt

$$P_3 = \chi P_2 + (1 - \chi)I$$

mit

$$\chi := \frac{|E|}{|V|^2}.$$

Dagegen ist  $P_1$  im Allgemeinen keine Linearkombination der anderen: Für  $k = 1$ , also bei einem Teilchen, ist bei den Varianten 2 und 3 die Wahrscheinlichkeit, auf einem Knoten mit niedrigerem Grad zu bleiben, höher als die, auf einem mit höherem Grad zu bleiben. Bei Variante 1 hingegen ist sie gleich. Eine äquivalente Aussage gilt für  $k \geq 1$  auf  $G_\Omega$ .

Ist  $\deg(v)$  jedoch für  $v \in V$  konstant, dann gilt

$$P_2 = \psi P_1 + (1 - \psi)I \quad \text{und} \quad P_3 = \chi\psi P_1 + (1 - \chi\psi)I$$

mit

$$\psi := \frac{k \deg(v_1)}{|E|}.$$

Es gilt für alle  $x, y \in \Omega$

$$P_3(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \text{dist}_{G_\Omega}(x, y) > 1, \\ \frac{2}{n^2} & \text{falls } \text{dist}_{G_\Omega}(x, y) = 1, \\ 1 - \deg(x)\frac{2}{n^2} & \text{falls } \text{dist}_{G_\Omega}(x, y) = 0 \quad (\text{also } x = y). \end{cases} \quad (4.2)$$

Es gilt das folgende, leicht zu überprüfende Lemma:

**Lemma 4.1** ([37]). *Die invariante Verteilung von SEP-2 und SEP-3 ist gleichverteilt auf allen möglichen Konfigurationen, und der Prozeß ist reversibel.*

Um nun die Komplexität der Graphenstruktur  $G_\Omega$  auf dem Zustandsraum zu reduzieren, kann man versuchen, Symmetrien des zugrundeliegenden Graphens  $G$  auszunützen. Dazu definieren wir zunächst folgende Begriffe:

Ein **Graphen-Automorphismus**  $G_\Omega \rightarrow G_\Omega$  ist ein Automorphismus  $V_\Omega \rightarrow V_\Omega$ , der Nachbarn wieder genau auf Nachbarn abbildet. Ein Graph  $G_\Omega$  heißt **knoten-transitiv**, kurz **transitiv**, falls es für alle  $x, y \in V_\Omega$  einen Graphen-Automorphismus  $\phi : G_\Omega \rightarrow G_\Omega$  mit  $\phi(x) = y$  gibt.

Ist  $G_\Omega$  nun transitiv, vereinfacht sich die Berechnung von  $d(t)$ , denn für für jedes  $y \in \Omega$  gilt

$$d(t) := \max_{x \in \Omega} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}} = \|P^t(y, \cdot) - \pi\|_{\text{TV}}. \quad (4.3)$$

---

**Lemma 4.2.** *Ist  $k = 1$  und schon  $G$  transitiv, so ist auch  $G_\Omega = G$  transitiv.*

Dies nützt etwa [26] aus, um für Folgen von *random walks* auf bestimmten Hamming-Graphen TV-Cutoff nachzuweisen. Hamming-Graphen sind verallgemeinerte Hyperwürfel: Sei  $S$  endlich und  $d \in \mathbb{N}$ , dann ist  $V := S^d$ , und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Hamming-Graphen sind transitiv.

Für SEP-1 gewinnen die Autoren von [14, 45] durch einen Vergleich mit dem Bernoulli-Laplace-Diffusionsmodell eine Schranke an den zweitgrößten Eigenwert zunächst für  $k = 1$  und dann für allgemeines  $k$ . Über (3.7) ergibt sich dadurch eine Schranke an die Mischzeit. In [15] zeigen die Autoren eine logarithmische Sobolev-Ungleichung für SEP-1, unsern Satz 5.9, und verbessern die Schranke aus [14, 45] über die übliche Ungleichung (3.13) um eine Größenordnung.

In [41] zeigt der Autor jedoch für SEP-2, daß auch diese für kleine  $k$  auf  $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}^d$  nicht optimal ist. Er bestimmt die optimale Schranke an  $t_{\text{mix}}$  für SEP-2 auf  $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}^d$  als  $\mathcal{O}(L^2 \log k)$  mit  $k \leq \frac{1}{2}L^d$ .



## 5. Auf dem vollständigen Graphen

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **vollständig**, wenn  $E = \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$ . Ein Graph  $G$  heißt **leer**, wenn  $E = \emptyset$  ist.

**Lemma 5.1.** *Ist  $G$  vollständig, so ist  $G_\Omega$  transitiv.*

*Beweis.* Ist  $G$  vollständig, so stellt jede Permutation  $p \in S_{|V|}$  von  $V$  ein Graphen-Automorphismus von  $G$  dar. Somit ist  $G_\Omega = (V_\Omega, E_\Omega)$ , der Zustandsraum des *simple exclusion process* auf  $G$  mit  $k$  Teilchen, definiert in (4.1), transitiv: Zu allen  $\eta, \eta' \in V_\Omega = \Omega$  gibt es ein  $p \in S_{|V|}$ , so daß  $\eta_v = \eta'_{p(v)}$  für alle  $v \in V$  ist, und jeder  $G$ -Automorphismus  $p$  besitzt einen kanonischen  $G_\Omega$ -Automorphismus  $\phi : \theta \mapsto \{p(v) : v \in \theta\}$ , für den nach Konstruktion  $\phi(\eta) = \eta'$  gilt.  $\square$

### 5.1. Formale Definition

Um Cutoff für  $n \rightarrow \infty$  zu beobachten, ist eine Folge von Markovketten notwendig. Wir definieren daher unsere Prozesse für alle  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Besteht keine Gefahr der Verwechslung, lassen wir in Aussagen, die für alle  $n$  gelten, in der Notation das  $\cdot^{(n)}$  weg.

Sei also  $(G^{(n)})_{n=1}^\infty$  eine Folge vollständiger Graphen mit jeweils  $n$  Knoten:

$$V^{(n)} := \{1, \dots, n\} \qquad E^{(n)} := \{\{i, j\} : i, j \in V_n, i \neq j\}$$

Sei weiterhin  $(k_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge ganzer Zahlen mit jeweils  $1 \leq k_n \leq n - 1$ , die Anzahl der Teilchen auf dem  $n$ -ten Graphen.

**Bemerkung 5.2.** Aufgrund von Symmetrie gilt oBdA  $k_n \leq \frac{n}{2}$ .

Der Raum der **Konfigurationen** ist durch

$$\Omega^{(n)} := \left\{ \eta \in \{0, 1\}^n \mid \sum_{x=1}^n \eta(x) = k_n \right\}$$

gegeben. Wir betrachten die Folge von Markovketten  $(X_t^{(n)})_{n=1}^\infty$ , jeweils auf  $\Omega^{(n)}$  mit Übergangsmatrix  $P^{(n)}$ , die jeweils in jedem Schritt zufällig gleichverteilt zwei Knoten aus  $\{1, \dots, n\}$  auswählen und deren Inhalt vertauschen. Jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{n}$  sind die Knoten identisch und es passiert nichts. Für  $\eta, \eta' \in \Omega$  und  $\eta \neq \eta'$  gilt also

$$P(\eta, \eta') := \begin{cases} \frac{2}{n^2} & \text{wenn } \eta \text{ und } \eta' \text{ sich durch eine Transposition unterscheiden} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $P(\eta, \eta) \geq \frac{1}{2}$ .

Die Markovkette  $(X_t)$  ist reversibel, träge, aperiodisch und irreduzibel. Ihre invariante Verteilung ist die Gleichverteilung auf  $\Omega^{(n)}$ , die wir mit  $\pi^{(n)}$  bezeichnen wollen.

Wir schreiben  $\mathbb{P}^\xi$  für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Markovkette  $(\eta_t)$  auf  $\Omega$ , die in der Konfiguration  $\eta_0 = \xi \in \Omega$  startet,  $\mathbb{E}^\xi$  für den Erwartungswert und  $\mu_t^\xi$  für deren Randverteilung zur Zeit  $t$ .

## 5.2. Projektion auf das Bernoulli-Laplace-Diffusionsmodell

Das BERNOULLI-LAPLACE-Diffusionsmodell, siehe [23], im folgenden kurz **BLDM**, beschreibt zwei Urnen: In der linken sind zu Beginn  $k'$  rote Kugeln, in der rechten sind  $n' - k'$  schwarze. In jedem Schritt wird zunächst in beiden Urnen jeweils eine Kugel gleichverteilt ausgewählt, dann werden beide Kugeln miteinander vertauscht. Man interessiert sich für die Anzahl der roten Kugeln in der linken Urne nach  $t'$  Schritten.

Schon in [19] weisen die Autoren darauf hin, daß eine Analyse des *simple exclusion process* auf dem vollständigen Graphen durch eine Projektion auf das BLDM vereinfacht wird. Wir folgen der in [34] explizit ausgeführten Projektion:

Nach Lemma 5.1 ist  $G_\Omega$  transitiv. Somit hängt  $\|\mu_t^\xi - \pi\|_{\text{TV}}$  nicht von  $\xi$  ab, und wir setzen

$$\eta_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{1, \dots, k_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.1)$$

und schreiben  $\mathbb{P}^{(n)}$  (bzw.  $\mu_t^{(n)}$ ) für die Verteilung von  $(X_t)$  (bzw.  $X_t$ ).

Für alle  $t$  ist  $\mu_t$  invariant unter Permutationen der Koordinaten  $\{1, \dots, k_n\}$  sowie von  $\{k_n + 1, \dots, n\}$ . Dies gilt für  $t = 0$ , und bleibt so für  $t > 0$ , da die Dynamik ebenfalls invariant unter diesen Permutationen ist. Daher setzen wir

$$W^{(n)}(\eta) := \sum_{x=1}^{k_n} \eta(x),$$

$$W_t^{(n)} := W(\eta_t).$$

Für alle  $t$  und  $m$  ist dann, falls  $\mu(W_t = m) > 0$ ,  $\mu_t(\cdot | W = m)$  die Gleichverteilung auf allen Konfigurationen  $\eta$  mit  $W(\eta) = m$ .

Sei  $\bar{\mu}_t^{(n)}$  bzw.  $\bar{\pi}^{(n)}$  die Verteilungen von  $W^{(n)}$  unter  $\mu_t$  bzw.  $\pi$ . Somit ist

$$\|\mu_t - \pi\|_{\text{TV}} = \|\bar{\mu}_t - \bar{\pi}\|_{\text{TV}}.$$

Da  $(W_t)$  die Markoveigenschaft erfüllt, beschränkt sich somit die Untersuchung des *simple exclusion process* auf die einer *birth-and-death*-Kette auf  $\{0, \dots, k_n\}$ . Die *birth-and-death*-Kette beginnt mit der ungünstigsten Anfangsbedingung, bei  $W_0^{(n)} = W^{(n)}(\eta_0) = k_n$ .

Sei  $\bar{P}^{(n)}$  die Übergangsmatrix von  $(W_t^{(n)})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \bar{P}(i, i+1) &= \frac{2(k-i)^2}{n^2} \\ \bar{P}(i, i-1) &= \frac{2i(n-2k+i)}{n^2} \\ \bar{P}(i, i) &= \frac{n^2 - 2((k-i)^2 + i(n-2k+i))}{n^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\bar{P}(i, i + 1)$  und  $\bar{P}(i, i - 1)$  sind dabei genau die des BLDM multipliziert mit dem Faktor

$$\kappa := \frac{k_n(n - k_n)}{n^2}, \quad (5.3)$$

da beim *simple exclusion process* die beiden an der in jedem Schritt zufällig gezogenen Kante anliegenden Knoten beide besetzt oder beide unbesetzt sein können, und keine Teilchenbewegung stattfindet.

### 5.3. Schranken an die Mischzeit

Um Lemma 3.20 anwenden zu können, fixieren wir zunächst für alle  $x, y \in \Omega$  einen Pfad  $\beta(x, y)$  in  $G_\Omega$ . Zur besseren Beschreibung wollen wir die Knoten als von links nach rechts geordnet betrachten,  $v_1 < \dots < v_n$ .

**Definition 5.3.** Wir definieren  $\beta(x, y)$  rekursiv. Offensichtlich setzen wir für alle  $x \in \Omega$

$$\beta(x, x) := \emptyset.$$

Sonst sei für  $x, y \in \Omega$

$$a := \min_{\substack{v \in x \\ v \notin y}} v \quad \text{und} \quad b := \min_{\substack{v \in y \\ v \notin x}} v.$$

Sei weiterhin  $x' := x$  und  $x'' := (x \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ . Dann setzen wir

$$\beta(x, y) := \{(x', x'')\} \cap \beta(x', y).$$

**Bemerkung 5.4.** Iterativ könnten wir  $\beta(x, y)$  also wie folgt beschreiben: Beginnen wir in der Konfiguration  $x$ , so bewegt sich mit jedem Schritt des Pfades das Teilchen auf dem linken Knoten, der in  $y$  nicht besetzt ist; es bewegt sich auf den linken Knoten in  $y$ , der in  $x$  noch nicht von einem Teilchen besetzt ist.

**Bemerkung 5.5.** Da in jedem Rekursionsschritt  $\text{dist}(x, y)$  um 1 sinkt, ist  $\beta$  wohldefiniert. Außerdem ist  $\beta(x, y)$  optimal kurz, also  $\text{dist}(x, y) = |\beta(x, y)|$ . Dies ermöglicht, eine möglichst gute Schranke zu erhalten.

**Lemma 5.6.** Die maximale Anzahl der nach 5.3 definierten kürzesten Pfade, die eine bestimmte Kante benutzen, ist gegeben durch

$$\max_{e \in E} |\{\{x, y\} : e \in \beta(x, y)\}| = \binom{n - 2}{k_n - 1}.$$

*Beweis.* Sei  $e = (x', x'') \in E$ . Sei  $a \in x' \setminus x''$  und  $b \in x'' \setminus x'$ , also  $a \mapsto b$  genau die eine Teilchenbewegung, die  $x'$  in  $x''$  überführt. In der Konfiguration  $x$  ist auf dem Knoten  $a$  also ein Teilchen; auf  $b$  ist keines, wir sprechen daher von einer „Lücke“.

Wir wählen  $i$  und  $j$  so, daß  $a$  das  $i$ -kleinste Teilchen in  $x$ , und  $b$  die  $j$ -kleinste Lücke in  $x$  ist.

Aus  $e \in \beta(x, y)$  ergeben sich nun folgende Bedingungen an  $x$  und  $y$ . Wir unterscheiden die „Vergangenheit“, also was auf dem gerichteten Pfad  $\beta(x, y)$  vor  $e$ , der aktuell betrachteten Kante, passiert, und der „Zukunft“, also, was auf  $\beta(x, y)$  hinter  $e$  passiert. Die Vergangenheit liefert uns Bedingungen an  $x$ , die Zukunft an  $y$ . Nach Definition 5.3 gilt:

## 5. Auf dem vollständigen Graphen

---

- Alle Teilchen links von  $a$ , also  $\{c \in x' : c < a\}$ , sind eventuell vor  $e$  bewegt worden. Die Teilchen, die bewegt wurden, wurden von einer der Lücken links von  $b$ , also  $\{c \notin x' : c < b\}$ , wegbewegt.

Teilchen rechts von  $a$  wurden vor  $e$  nicht bewegt, und von den Lücken rechts von  $b$  nichts entfernt.

Die Anzahl der Teilchen links von  $a$  ist  $i - 1$ , die der Lücken links von  $b$  ist  $j - 1$ . Damit wurden in der Vergangenheit maximal  $m_1 := \min(i - 1, j - 1)$  Teilchen bewegt. Für diese Bewegungen gab es genau

$$M_x := \sum_{l=0}^{m_1} \binom{i-1}{l} \binom{j-1}{l}$$

Möglichkeiten, also  $M_x$  mögliche Werte von  $x$ , so daß  $e \in \beta(x, y)$ .

- Nach  $e$  werden eventuell die Teilchen rechts von  $a$ , also  $\{c \in x' : c > a\}$  bewegt, und zwar auf Lücken rechts von  $b$ , also  $\{c \notin x' : c > b\}$ .

Die Teilchen links von  $a$  werden nicht mehr bewegt werden, und von den Lücken links von  $b$  wird nichts mehr entfernt werden.

Die Anzahl der Teilchen rechts von  $a$  ist  $k - i$ , die der Lücken rechts von  $b$  ist  $(n - k) - j$ . Damit werden in der Zukunft maximal  $m_2 := \min(k - i, (n - k) - j)$  Teilchen bewegt. Für diese Bewegungen gibt es genau

$$M_y := \sum_{l=0}^{m_2} \binom{k-i}{l} \binom{(n-k)-j}{l}$$

Möglichkeiten, also  $M_y$  mögliche Werte von  $y$ , so daß  $e \in \beta(x, y)$ .

Dafür, daß  $e \in \beta(x, y)$  gilt, gibt es also für  $(x, y)$

$$M(n, k, i, j) := M_x M_y = \left( \sum_{l=0}^{m_1} \binom{i-1}{l} \binom{j-1}{l} \right) \left( \sum_{l=0}^{m_2} \binom{k-i}{l} \binom{(n-k)-j}{l} \right)$$

Möglichkeiten. Da  $a$  und  $b$  in dieser Formel gar nicht mehr vorkommen, aber durch  $(i, j, x')$  bestimmt sind, setzen wir

$$M(n, k) := \max_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n-k}} M(n, k, i, j),$$

und da das Maximum für alle  $(n, k)$  zum Beispiel für  $i = 1$  und  $j = 1$  angenommen wird, gilt

$$M(n, k) = \sum_{l=0}^k \binom{k-1}{l} \binom{(n-k)-1}{l}$$

und nach der Chu-Vandermonde-Gleichung (siehe z.B. [32]) gilt

$$M(n, k) = \binom{n-2}{k-1}.$$

□

**Lemma 5.7.** *Für den simple exclusion process auf dem vollständigen Graphen mit  $k$  Teilchen gilt*

$$V(x, r) = \sum_{i=0}^r \binom{k}{i} \binom{n-k}{r-i}.$$

*Beweis.* Nach  $r$  Teilchenbewegungen haben sich bis zu  $r$  der  $k$  Teilchen bewegt, und auf  $r$  der  $n-k$  ursprünglich unbesetzten Knoten niedergelassen.  $\square$

**Satz 5.8.** *Der simple exclusion process auf dem vollständigen Graphen mit  $k$  Teilchen erfüllt eine lokale Poincaré-Ungleichung mit einer Konstanten von  $a := n^2$ .*

*Beweis.* Es ist  $\eta(r)$  aus Lemma 3.20 gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta(r) &:= \max_{e \in E_\Omega} \left\{ \frac{2}{Q(e)} \sum_{\substack{x, y: \text{dist}(x, y) \leq r \\ e \in \beta(x, y)}} |\beta(x, y)| \frac{\pi(x)\pi(y)}{V(x, r)} \right\} \\ &= n^2 \max_{e \in E_\Omega} \left\{ \sum_{\substack{x, y: \text{dist}(x, y) \leq r \\ e \in \beta(x, y)}} \frac{|\beta(x, y)|}{V(x, r)} \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nach dem Beweis von Lemma 5.6 wird das Maximum zum Beispiel für

$$e = (x, x') := (\{v_1, \dots, v_k\}, \{v_2, \dots, v_{k+1}\})$$

angenommen.

Wir definieren die Anzahl  $R(i)$  der von einem Knoten mit genau  $i$  Teilchenbewegungen erreichbaren Knoten, wobei Zurückgehen nicht erlaubt ist, mit

$$R(i) := \binom{k}{i} \binom{n-k}{r-i}.$$

Dann ist  $V(x, r) = \sum_{i=0}^r R(i)$ .

Hinter  $e$  können in einem kürzesten Pfad  $\beta(x, y)$ , wie er in 5.3 definiert wurde, noch bis zu  $r-1$  Kanten folgen. Sei  $Y(i)$  die Anzahl der nach  $e$  noch mit genau  $i$  weiteren Teilchenbewegungen erreichbaren Knoten. Dann gilt äquivalent zu Lemma 5.7, nur mit einem Knoten ( $v_1$ ) und einer Lücke weniger ( $v_{k+1}$ ):

$$Y(i) = \binom{k-1}{i} \binom{n-k-1}{r-i} = \frac{(k-r)(n-k-r)}{k(n-k)} R(i).$$

Dann gilt mit (5.4) weiter

$$\begin{aligned}
 \eta(r) &= n^2 \sum_{\substack{y: \text{dist}(x,y) \leq r \\ e \in \beta(x,y)}} \frac{|\beta(x,y)|}{V(x,r)} \\
 &= n^2 \sum_{i=0}^{r-1} \frac{iY(i)}{V(x,r)} \\
 &= n^2 \sum_{i=0}^{r-1} \left( \frac{(k-r)(n-k-r)}{k(n-k)} \cdot \frac{iR(i)}{\sum_{j=0}^r R(j)} \right) \\
 &\leq \frac{n^2}{\binom{n}{k}} r^2,
 \end{aligned}$$

und damit gilt nach Lemma 3.20 die Behauptung.  $\square$

Mit diesem Satz erhalten wir für den *simple exclusion process*

$$\text{Var}_\pi(f, f) \leq a\beta^2 \mathcal{E}(f, f),$$

also

$$\gamma \geq \frac{1}{a\beta^2} = \frac{1}{n^2 k_n^2}.$$

Auch eine detailliertere Analyse des *simple exclusion process* auf beliebigen Graphen liefert das folgende Ergebnis:

**Satz 5.9** ([15]). *Für SEP-1 auf einem Graphen  $G = (V, E)$  mit  $k_n$  Teilchen gilt*

$$\gamma \geq \frac{n}{k_n d \Delta_0} \quad \text{und} \quad \alpha \geq \frac{n}{3k_n d \Delta_0 \log n},$$

wobei

$$d := \max_{x \in \Omega} \left( \frac{1}{k_n} \sum_{v \in x} \deg(v) \right)$$

und

$$\Delta_0 := \max_{e \in E} \left( \sum_{\{x,y\}: e \in \beta(x,y)} |\beta(x,y)| \right)$$

ist.

Die Schranke an die logarithmische Sobolev-Konstante für SEP-1 liefert mit (3.13) für den vollständigen Graphen  $G$ :

$$2 \|H_t - \pi\|_{\text{TV}}^2 \leq \log \left( \binom{n}{k}^{-1} \right) \exp \left( -2 \frac{n}{3k_n(n-1)} t \right).$$

In unserem Fall, also SEP-3 auf  $G$  vollständig, erhalten wir daher

$$\gamma \geq \frac{n}{k_n(n-1)} \chi\psi = \frac{1}{n}.$$

Für allgemeine  $k$  ist diese Schranke also bis auf Faktor 2 optimal, wie sich in Abschnitt 5.6 herausstellen wird. Mit (3.7) ergibt sich

$$(n-1) \log 2 \leq t_{\text{mix}} \leq \log \left( 4 \binom{n}{k}^{-1} \right) n. \quad (5.5)$$

Leider ist weder diese über die Spektrallücke erhaltene noch die über die logarithmische Sobolev-Ungleichung als jeweils eine einzige Ungleichung in der Lage, das unterschiedliche Mischverhalten in den verschiedenen Phasen, also vor und nach dem Cutoff richtig abzubilden. Ein Nachweis des Cutoff-Phänomens wird ohne weitere Hilfsmittel also nicht gelingen.

Auch ein Ergebnis wie Theorem 3.21 ist ohne weitere Hilfsmittel nicht ausreichend, um das Vorkommen von Cutoff zu widerlegen (Sei  $G$  etwa ein Kreis.): Zum einen hängen Konstanten  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$  und  $c_6$  in

$$c_3 e^{c_4 t / \beta^2} \leq d(t) \leq c_5 e^{-c_6 t / \beta^2} \quad (5.6)$$

von  $M$ ,  $d$  und  $a$  ab, und diese hängen in den meisten Anwendungen immer von  $n$  ab. Zum anderen ist die untere Schranke in den allermeisten Fällen so weit von der oberen entfernt, daß Cutoff dazwischen stattfinden kann.

## 5.4. TV-Cutoff: Position und Intervalllänge

Für das BLDM zeigt [19] das Vorkommen des TV-Cutoff für  $k_n = \frac{n}{2}$ . [22] erweitert dies im zeit-stetigen Fall auf  $k = \alpha n$  für  $\alpha \in (0, 1)$ . Für das Modell ist die Bedingung  $t_{\text{rel}} = o(t_{\text{mix}})$  leicht zu überprüfen, womit das Vorkommen von TV-Cutoff schon aus Satz 3.14 folgt. Die Position und die Intervalllänge des Cutoffs ergeben sich jedoch nur bei einer detaillierteren Analyse. Für den zeit-diskreten TV-Cutoff gilt:

**Theorem 5.10** ([34]). *Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = \infty$ , gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\alpha > 0$ , so daß für alle  $n$  gilt:*

$$\begin{aligned} d^{(n)}\left(\frac{1}{4}n \log n + \alpha n\right) &\leq \epsilon \\ d^{(n)}\left(\frac{1}{4}n \log n - \alpha n\right) &\geq 1 - \epsilon \end{aligned} \tag{5.7}$$

*Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ , gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\alpha > 0$ , so daß für alle  $n$  gilt:*

$$\begin{aligned} d^{(n)}\left(\frac{1}{2}n \log k_n + \alpha n\right) &\leq \epsilon \\ d^{(n)}\left(\frac{1}{2}n \log k_n - \alpha n\right) &\geq 1 - \epsilon \end{aligned} \tag{5.8}$$

*Für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = l \in (0, \infty)$  gilt (5.7) und (5.8).*

Der *simple exclusion process* auf dem vollständigen Graphen weist also das TV-cutoff-Phänomen auf, falls  $(\frac{k_n}{\sqrt{n}})_n$  konvergiert. Der Position des Cutoff liegt für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = \infty$  bei  $\frac{1}{4}n \log n$  und für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$  bei  $\frac{1}{2}n \log k_n$ . Seine Intervalllänge ist  $\mathcal{O}(n)$ .

Der Unterschied in der Cutoff-Position von (5.7) und (5.8) wird in [34] nicht näher kommentiert. Wir werden ihn im folgenden näher untersuchen.

## 5.5. Stationäre Verteilung

Die stationäre Verteilung des BLDM ergibt sich kombinatorisch: Der Nenner ist  $\binom{n}{k_n}$ , da von den insgesamt  $n$  Kugeln  $k_n$  in der linken Urne sind. Links sind dann  $i$  rote Kugeln auf  $k_n$  Plätze zu verteilen und rechts  $k_n - i$  auf  $n - k_n$  Plätze: Für  $i \in \{0, \dots, k_n\}$  ist

$$\pi^{(n)}(i) = \frac{\binom{k_n}{i} \binom{n-k_n}{k_n-i}}{\binom{n}{k_n}}.$$

**Satz 5.11.** *Sei  $\zeta_n := \frac{(k_n+1)^2}{n+2}$ . Für  $i < \zeta_n$  wächst die stationäre Verteilung  $\pi^{(n)}$  des BLDM mit  $i$  streng monoton. Für  $i > \zeta_n$  fällt sie mit wachsendem  $i$  streng monoton.*

**Korollar 5.12.**  *$\pi^{(n)}(i)$  hat sei Maximum genau dann bei  $i = 0$  (am linken Ende der birth-and-death-Kette), wenn  $k_n \leq \sqrt{n+2} - 1$ .*

*Beweis von Satz 5.11.* Für  $1 \leq i \leq k \leq \frac{n}{2}$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{(n)}(i)}{\pi^{(n)}(i-1)} &= \frac{\binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i}}{\binom{k}{i-1} \binom{n-k}{k-i+1}} \\ &= \frac{((k+1)-i)^2}{i((n+2)-2(k+1)+i)}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\pi^{(n)}(i)}{\pi^{(n)}(i-1)} < 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad i > \frac{(k+1)^2}{n+2}.$$

□

**Bemerkung 5.13.** Es ist

$$\sum_{i=\lfloor \zeta_n \rfloor}^{k_n} \pi^{(n)}(i) \geq \frac{1}{2}.$$

**Bemerkung 5.14.** Ist  $k = \frac{n}{2}$ , so ist  $\pi$  symmetrisch,  $\pi^{(n)}(i) = \pi^{(n)}(k_n - i)$ , und der maximale Wert wird bei  $\zeta_n = \frac{1}{4}(n+2)$ , in der Mitte der *birth-and-death*-Kette, angenommen.

**Bemerkung 5.15.** Mit den Bemerkungen 3.4 und 5.13 zeigt sich der Grund für den Unterschied in der Sep-Mischzeit gegenüber der TV-Mischzeit. Für die Sep-Mischzeit der Kette ist die Trefferzeit des letzten erreichbaren Zustandes, also des Zustands 0, relevant. Für die TV-Mischzeit hingegen ist entscheidend, wann Zustände mit großem  $\pi$  erreicht sind. Dies ist bereits bei  $\zeta_n$  der Fall.  $\zeta_n > 0$  ist äquivalent zu  $k_n > \sqrt{n+2} - 1$ , was die Unterscheidung in Theorem 5.10 erklärt.

## 5.6. Eigenwerte

Die Eigenwerte  $\lambda_i^{(n)}$  des zeit-stetigen Generators  $(I - P)$  des BLDM sind zum Beispiel in [28] zu finden: Mit den dort erwähnten Hahn-Polynomen als Eigenfunktionen ergibt sich für  $i \in \{0, \dots, k_n\}$

$$\lambda_i^{(n)} = \frac{i(n-i+1)}{n(n-k_n)}.$$

Somit sind die Eigenwerte von  $\bar{P}$  aus (5.2) entsprechend unserer Zeitskalierung (siehe (5.3))

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(n)} &= 1 - \kappa \lambda_i^{(n)} \\ &= 1 - \frac{2i(n-i+1)}{n^2}. \end{aligned}$$

Wegen 5.2 gilt

$$1 = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{k_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} > 0,$$

der zweitgrößte Eigenwert ist also  $\lambda_1 = 1 - \frac{2}{n}$ .

**Theorem 5.16** ([25]). *Gegeben sei eine birth-and-death-Kette auf  $\{0, \dots, d\}$  mit Übergangsmatrix  $P$  und Anfangszustand  $0$ . Der Zustand  $d$  sei absorbierend, d.h.  $P(d, d-1) = 0$ . Weiterhin sei  $P(i, i+1) > 0$  für  $0 \leq i \leq d-1$  und  $P(i, i-1) > 0$  für  $1 \leq i \leq d-1$ . Dann hat die Trefferzeit des Zustands  $d$  die Erzeugendenfunktion*

$$u \mapsto \prod_{j=1}^d \frac{(1 - \lambda_j)u}{1 - \lambda_j u}, \quad (5.9)$$

wobei  $-1 \leq \lambda_j < 1$  die  $d$  nicht-einheits Eigenwerte von  $P$  sind.

Da  $\lambda_j > 0$  für  $j \in \{1, \dots, k_n\}$ , gilt folgendes Korollar:

**Korollar 5.17** (siehe auch [25]). *Für  $(W_t)$  ist die Trefferzeit des Zustands  $0$  wie die Summe von  $k_n$  unabhängigen geometrischen Zufallsvariablen, jeweils mit Mißerfolgswahrscheinlichkeit  $\lambda_j$ , verteilt.*

Da  $\lambda_i^{(n)}$  nicht von  $k_n$  abhängt, gilt auch:

**Korollar 5.18.** *Für  $(W_t)$  ist die Trefferzeit des Zustands  $d$  wie die Summe von  $k_n - d$  unabhängigen geometrischen Zufallsvariablen, jeweils mit Mißerfolgswahrscheinlichkeit  $\lambda_j$ ,  $j \in \{d+1, \dots, k_n\}$ , verteilt.*

**Bemerkung 5.19.** Ebenso folgt das interessante  $\mathbb{E}^{k_n}[\tau_0] = \mathbb{E}^0[\tau_{k_n}]$ .

Es sei

$$\tau_d := \min\{t \geq 0 : W_t = d\}. \quad (5.10)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{k_n}[\tau_d] &= \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{1 - \lambda_j} \\ &= \frac{n}{2} \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{n}{j(n-j+1)} \\ &= \frac{n}{2} \left( \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{j} + \sum_{j=d+1}^{k_n} \left( \frac{1}{j} \cdot \frac{j-1}{n-j+1} \right) \right) \\ &= \frac{n}{2} \left( \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{j} + \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{n-j+1} - \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{i(n-j+1)} \right) \\ &= \frac{n^2}{2(n+1)} \left( \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{j} + \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{n-j+1} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}^{k_n}[\tau_d] &= \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{\lambda_j}{(1-\lambda_j)^2} \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda_1} \mathbb{E}^{k_n}[\tau_d] \\ &= \frac{n}{2} \mathbb{E}^{k_n}[\tau_d].\end{aligned}\tag{5.12}$$

## 5.7. Sep-Cutoff

Das Vorkommen von Sep-Cutoff folgt mit der Projektion auf das BLDM bereits aus Satz 3.13. Die Position und die Intervalllänge sind jedoch nur für den zeit-stetigen Fall in [19] zu finden. Für den zeit-diskreten gilt:

**Theorem 5.20.** *Sei*

$$f(n, k_n, d) := \mathbb{E}^{k_n}[\tau_d] = \frac{n^2}{2(n+1)} \left( \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{j} + \sum_{j=d+1}^{k_n} \frac{1}{n-i+1} \right)$$

*Der simple exclusion process mit  $k_n$  Teilchen auf dem vollständigen Graphen mit  $n$  Knoten hat für  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$  Sep-Cutoff bei  $f(n, k_n, 0)$  mit Intervalllänge  $\mathcal{O}(n)$ .*

*Beweis.* Sei  $\eta_0 = \xi \in \Omega$  der Anfangszustand der Markovkette. Aus (5.1) wissen wir, daß wir oBdA  $\xi = \{1, \dots, k_n\}$  annehmen können. Sei  $\tau$  die erste Zeit, zu der alle  $k$  Teilchen mindestens einmal bewegt wurden. Dann ist  $\tau$  eine *strong stationary time* bezüglich  $\eta$ . Wir wählen  $\zeta := \{k_n + 1, \dots, 2k_n\} \in \Omega$ , so daß  $\zeta \cap \xi = \emptyset$  gilt. Dann ist  $\zeta$  ein Haltezustand von  $\tau$ , denn für alle  $t$  mit  $\eta_t = \zeta$  gilt  $\tau \leq t$ . Somit gilt nach Satz 3.7

$$s_\xi(t) = \mathbb{P}^\xi\{\tau > t\}$$

Aufgrund der Projektion aus Abschnitt 5.2 und  $W^{(n)}(\zeta) = 0$  ist  $\tau$  wie  $\tau_0$  aus (5.10) verteilt. Nun gilt

$$\mathbb{E}^{k_n}[\tau_0] - \mathbb{E}^{k_n}[\tau_1] = \frac{n}{2}$$

und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}^\xi\{\tau \leq f(n, k, 0) - \alpha n\} = 0.$$

□



# 6. Auf allgemeinen Graphen

## 6.1. Transitiver Zustandsraum

Entfernt man aus dem vollständigen Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  die Kante  $e = \{v_1, v_2\}$ , geht im Allgemeinen (also bei beliebigem  $k$ ) die Transitivität von  $G_\Omega$  verloren: Während  $v_1$  und  $v_2$  nun  $n - 2$  Nachbarn haben, haben alle übrigen Knoten immer noch  $n - 1$  Nachbarn. Sei  $k := 1$ . Dann gibt es keinen  $G_\Omega$ -Automorphismus mit  $\{v_1\} \mapsto \{v_3\}$ . Halten wir also fest (das Argument funktioniert minimal verändert für beliebiges  $k$ ):

**Lemma 6.1.** *Ist  $\deg(v)$  für  $v \in V$  nicht konstant, so ist  $G_\Omega$  nicht transitiv.*

Zusätzlich beobachten wir:

**Lemma 6.2.** *Ist  $\deg(v)$  für alle  $v \in V$  konstant, so ist  $|E| = \frac{1}{2}mn$  mit  $2 \leq m \leq n - 1$*

$$m \in \begin{cases} \mathbb{N} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2\mathbb{N} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Allerdings müssen wir feststellen, daß es für  $2 \leq m < n - 1$  keine transitiven Konfigurationsräume gibt:

**Satz 6.3.**  *$G_\Omega$  ist für alle  $k$  nur genau dann transitiv, wenn  $G$  vollständig oder leer ist.*

*Beweis.* Sei  $G_\Omega$  weder vollständig noch leer. Wir setzen  $k := 2$ . Seien  $\{v_1, v_2\}$  Nachbarn in  $G$  und  $\{v_3, v_4\}$  keine Nachbarn. Dann gibt es nach Lemma 6.1 aus der Konfiguration  $\{v_1, v_2\}$  genau  $2(\deg(v_1) - 1)$  Möglichkeiten für Teilchenbewegungen, also Nachbarn in  $G_\Omega$ . Aus  $\{v_3, v_4\}$  sind es jedoch  $2 \deg(v_1)$ . Daher gibt es keinen  $G_\Omega$ -Automorphismus  $\{v_1, v_2\} \mapsto \{v_3, v_4\}$ .  $\square$

**Bemerkung 6.4.** Die Gleichung (4.3) gilt also nur genau dann für  $G$ , wenn  $G$  vollständig oder leer ist. In allen übrigen Fällen fehlt mit ihr eine entscheidende Voraussetzung für eine Projektion entsprechend zu der in Abschnitt 5.2. Wir erwarten daher, daß jede Analyse eines weder vollständigen noch leeren  $G$ , also mit  $n - 1 \leq |E| \leq \frac{n(n-1)}{2}$  bei  $n$  Knoten, abgesehen von Spezialfällen, wie etwa der *birth-and-death*-Kette, wesentlich involvierter ausfallen muß.

Dies wollen wir im folgenden, ausgehend vom vollständigen Graphen, versuchen.

## 6.2. Der Einfluß von $\mathcal{O}(1)$ Kanten

Entfernen wir eine konstante Anzahl von Kanten, sagen wir exemplarisch genau eine Kante  $e = \{v_1, v_2\}$ , so ist, natürlich solange der Graph zusammenhängend bleibt, keine Änderung am Cutoff-Verhalten zu bemerken, denn für die Wahrscheinlichkeit, daß  $e$  in keiner der ersten  $\frac{1}{2}n(1 + \log n)$  Schritte der Kette ausgewählt wird, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n(1 + \log n)} = 1.$$

## 6.3. Der Einfluß von $\mathcal{O}(n)$ Kanten

Um wenigstens eine grundlegende Symmetrie auf  $G$  aufrecht zu erhalten, und damit die Analyse zu erleichtern, halten wir also  $\deg(v)$  für alle  $v \in V$  konstant und wählen  $m$  aus Lemma 6.2 gerade, so daß  $n$  ungerade sein darf.

Das bedeutet: Wir entfernen von jedem Knoten jeweils 2 Kanten, wobei jede Kante für ihre beiden Knoten zählt.

Allerdings können weiterhin interessante Asymmetrien auf  $G$  auftreten, zum Beispiel wenn aus dem vollständigen Graphen mit  $n = 6$  zwei Kreise mit jeweils drei Knoten entfernt werden: der sogenannte vollständige bipartite Graph  $K_{3,3}$ . Ein Graph heißt bipartit, wenn der *random walk* auf ihm die Periode 2 hat.

Um auch Periodizität zu vermeiden, fordern wir schließlich: Sei  $G$  vollständig bis auf Eulerzyklen.

**Definition 6.5.** Eine Menge  $M$  von Kanten in einem Graphen  $G = (V, E)$  heißt ein **Eulerzyklus**, wenn sie einen Kreis darstellt, der jeden Knoten genau einmal enthält. Formal gilt

$$M = \left\{ \{v_{\sigma(v_1)}, v_{\sigma(v_2)}\}, \{v_{\sigma(v_2)}, v_{\sigma(v_3)}\}, \{v_{\sigma(v_3)}, v_{\sigma(v_4)}\}, \dots, \right. \\ \left. \{v_{\sigma(v_{n-1})}, v_{\sigma(v_n)}\}, \{v_{\sigma(v_n)}, v_{\sigma(v_1)}\} \right\}$$

mit  $n = |V|$  für eine Permutation  $\sigma \in S_n$ .

Dabei stellen wir fest: Die Menge  $E$  der Kanten des vollständigen Graphen läßt sich, wenn  $n$  ungerade ist, so in  $E = \bigcup Z_i$  partitionieren mit  $i \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ , daß  $Z_i$  jeweils ein Eulerzyklus ist. Sei  $n$  also ungerade.

Bei dem sukzessiven Entfernen von Eulerzyklen aus einem vollständigen Graphen hat man dabei eine mit  $n$  zunächst rapide wachsende Vielzahl von Freiheitsgraden, siehe [29]. Nach dem Entfernen eines einzigen Zyklus ist der resultierende Graph bis auf Isomorphie identisch.

Bestehe  $E$  also aus  $l$  disjunkten Eulerzyklen mit  $1 \leq l \leq \frac{n-1}{2}$ . Dann halten wir fest:

1. Für  $l = 1$  tritt kein Cutoff auf, siehe 3.16.
2. Für  $l = \frac{n-1}{2}$  tritt sowohl TV-Cutoff als auch Sep-Cutoff auf, siehe Kapitel 5.

Die interessante Frage ist nun: Was passiert bei  $1 < l < \frac{n-1}{2}$ ?

Im folgenden untersuchen wir den Fall  $l = \frac{n-3}{2}$ .

## 7. Auf $(n-3)/2$ disjunkten Eulerzyklen

Wir definieren  $(G^{(n)})$  als Folge von Graphen mit jeweils  $n$  Knoten, die jeweils bis auf einen Eulerzyklus vollständig sind. Formal setzen wir  $G^{(n)} := (V^{(n)}, E^{(n)})$  mit

$$V^{(n)} := \{v_1, \dots, v_n\}$$

sowie

$$E^{(n)} := \{\{v_i, v_j\} : i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, i \neq j, i+1 \neq j\}.$$

Wie üblich lassen wir  $\cdot^{(n)}$  in der Notation weg, wenn Aussagen für alle  $n$  gelten. Den in  $G$  „fehlenden“ Eulerzyklus bezeichnen wir mit  $Z$ :

$$Z^{(n)} := \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}.$$

Für alle  $n$  vervollständigen wir  $G^{(n)}$  um den fehlenden Eulerzyklus  $Z^{(n)}$  zu dem Graphen  $G'^{(n)}$ . Sei

$$\begin{aligned} E'^{(n)} &:= E^{(n)} \cup Z^{(n)} = \{\{v_i, v_j\} : i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, i \neq j\} \\ G'^{(n)} &:= (V^{(n)}, E'^{(n)}). \end{aligned}$$

**Theorem 7.1.** *Der simple exclusion process mit  $k$  Teilchen auf  $G'^{(n)}$  weist TV-Cutoff bei  $\frac{1}{2}n \log k_n$  auf, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n \leq \infty$ .*

### 7.1. Beweisidee

Die Idee des Beweises ist die Konstruktion einer Kopplung  $(X'_t, X_t)$  des *simple exclusion process* auf  $G'$  mit dem auf  $G$ . Dabei wissen wir aus Kapitel 5, daß  $(X'_t)$  Cutoff aufweist. Die Kopplung versucht nun, die Konfiguration  $X_t$  möglichst „nahe“ an der von  $X'_t$  zu halten. Eine Abschätzung, wie wahrscheinlich der „perfekte“ Fall  $\{X_t = X'_t\}$  ist, liefert eine obere Schranke an  $(d(t) - d'(t))$  (im Beweis formal definiert), die mit  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert. Daher weist  $(X_t)$  ebenso TV-Cutoff an der selben Position auf.

Der Graph  $G$  ist regulär und transitiv. Für  $k = 1$  überträgt sich diese Eigenschaft auf  $G_\Omega$ , wohingegen das für allgemeines  $k$  nicht der Fall ist. Da der Beweis für  $k = 1$  unter Ausnützung dieser Tatsache wesentlich eleganter und kürzer ist, führen wir ihn im folgenden separat auf.

## 7.2. Beweis für $k = 1$

*Beweis von Theorem 7.1 für  $k = 1$ .* Wir konstruieren im folgenden eine Folge von Kopplungen  $(X_t^{(n)}, X_t^{(n)})$  von je zwei *simple exclusion processes* mit je  $k = 1$  Teilchen, wobei sich  $(X_t')$  auf  $G'$  und  $(X_t)$  auf  $G$  bewegt.

Wir wählen  $X_0'$  beliebig. Dann setzen wir  $X_0 := X_0'$ . Sei  $P'$  die Übergangsmatrix des in Abschnitt 5.1 definierten *simple exclusion process* mit  $k = 1$  auf dem vollständigen Graphen  $G'$ , also für alle  $x, y \in V$

$$P'(\{x\}, \{y\}) := \begin{cases} \frac{2}{n^2} & \text{für } x \neq y, \\ \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2} & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Einen Schritt  $t \mapsto t + 1$  der Kopplung definieren wir nun folgendermaßen:

1.  $X'_{t+1}$  sei verteilt wie  $P'(X'_t, \cdot)$  und sonst unabhängig von allen bisher gewählten Variablen.
2. Wir setzen

$$X_{t+1} := \begin{cases} X_t & \text{wenn } X'_{t+1} \in \{X_t - 1, X_t + 1\} \\ X'_{t+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_{t+1} = \{y\} \mid X_t = \{x\}\} &= \begin{cases} \frac{2}{n^2} & \text{für } \{x, y\} \in E \\ \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} + 2\frac{2}{n^2} & \text{sonst,} \end{cases} \\ &=: P(\{x\}, \{y\}) \end{aligned}$$

und somit ist  $(X_t)$  genau der *simple exclusion process* mit  $k = 1$  auf  $G$  mit Übergangsmatrix  $P$ .

Der Zustandsraum von  $(X_t)$  und  $(X'_t)$  ist identisch, und nach Lemma 4.1 ist die stationäre Verteilung beider Markovketten die Gleichverteilungen auf dem Zustandsraum; wir bezeichnen sie mit  $\pi$ . Bezeichne  $\mu_t$  die Randverteilung von  $X_t$  und  $d(t)$  ihre *total variation distance* zu  $\pi$ , sowie  $\mu'_t$  und  $d'(t)$  entsprechend von  $X'_t$ . Da  $G_\Omega$  transitiv ist, stimmen diese Definitionen von  $d(t)$  und  $d'(t)$  mit der aus (3.2) überein.

Da  $P^t(x, y) \leq P^{tt}(x, y)$  für alle  $t \in \mathbb{N}$  und  $x, y \in \Omega$  mit  $x \neq y$  gilt, — einfach nachzurechnen im Fall  $\{x, y\}$  Nachbarn oder nicht — ist

$$d'(t) \leq d(t). \tag{7.1}$$

Gemäß Definition unserer Kopplung gilt

$$\mathbb{P}\{X_t \neq X'_t\} = \mathbb{P}\{\{X'_t, X_{t-1}\} \in Z\} \tag{7.2}$$

Um  $\mathbb{P}\{\{X'_t, X_{t-1}\} \in Z\}$  weiter abzuschätzen, unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

- **Fall 1:** Ist  $X'_0 = X'_1 = \dots = X'_t$ , so ist  $X_0 = X'_0 = X_1 = X_2 = \dots = X_{t-1}$ , und daher

$$\mathbb{P}\{\{X'_t, X_{t-1}\} \in Z\} = 0.$$

- **Fall 2:** Sonst gibt es ein  $j$  mit  $X'_j \neq X'_{j+1} = X'_{j+2} = \dots = X'_t$ , und  $X'_{j+1}$  ist, gemäß einer Teilchenbewegung des *simple exclusion process* auf  $G'$ , gleichverteilt auf  $\{v \in V : v \notin X'_j\}$ . Also ist

$$\mathbb{P}\{\{X_t^{(n)}, X_{t-1}^{(n)}\} \in Z\} \leq \frac{2}{n-1}.$$

Beide Fälle ergeben zusammen mit (7.2)

$$\mathbb{P}\{X_t^{(n)} \neq X_t'^{(n)}\} \leq \frac{2}{n-1},$$

womit nach (3.1)

$$\left\| \mu_t'^{(n)} - \mu_t^{(n)} \right\|_{\text{TV}} \leq \frac{2}{n-1}$$

gilt. Aus der Dreiecksungleichung

$$\left\| \mu_t^{(n)} - \pi \right\|_{\text{TV}} \leq \left\| \mu_t^{(n)} - \mu_t'^{(n)} \right\|_{\text{TV}} + \left\| \mu_t'^{(n)} - \pi \right\|_{\text{TV}}$$

folgt schließlich

$$d^{(n)}(t) \leq \frac{2}{n-1} + d'^{(n)}(t). \quad (7.3)$$

Mit (7.1) und (7.3) folgt nach Theorem 5.10 die Behauptung für  $k = 1$ .  $\square$

### 7.3. Beweis für beliebiges $k \ll \sqrt{n}$

Im folgenden sei also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n \leq \infty$ .

**Definition 7.2.** Die Funktion  $\text{dist} := \text{dist}_{G'_\Omega}$  messe die Entfernung zweier Knoten in  $G'_\Omega$ .

Damit ist  $\text{dist}(x, y)$  für alle  $x, y \in \Omega$  genau die Anzahl der Teilchen, die in den Konfigurationen  $x$  und  $y$  auf verschiedenen Knoten verweilen. Zum Beispiel ist  $\text{dist}(\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}) = 1$ . Es gilt

$$0 \leq \text{dist}(x, y) \leq k. \quad (7.4)$$

**Definition 7.3.** Mit  $h(x)$  bezeichnen wir die Anzahl der auf dem Eulerzyklus  $Z$  benachbarten Teilchenpaare in der Konfiguration  $x \in \Omega$ :

$$h(x) := |\{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : i \in x \text{ und } i+1 \in x\}|.$$

Da aus Symmetriegründen  $k \leq \frac{n}{2}$  ist, gilt für alle  $x \in \Omega$

$$0 \leq h(x) \leq k-1. \quad (7.5)$$

**Bemerkung 7.4.** Das Ziel der Kopplung ist, wie in Abschnitt 7.1 beschrieben,  $\text{dist} := \text{dist}(X_t, X'_t)$  so wahrscheinlich wie möglich bei 0 zu halten.

Im Unterschied zum Fall  $k = 1$  bewegt sich  $(X_t)$  für  $k > 1$  seltener, siehe (4.2). Das bedeutet für die Kopplung, daß nicht jede Teilchenbewegung von  $(X'_t)$  sofort von  $(X_t)$  „nachgemacht“ werden kann, selbst wenn die Bewegung nicht entlang einer Kante aus  $Z$  stattfand, die also in  $G$  fehlt. Damit steigt  $\text{dist}$  mit  $t$  für  $k > 1$  wahrscheinlicher an als für  $k = 1$ .

**Bemerkung 7.5.** Ist  $\text{dist}(X_t, X'_t) > 1$ , was nur für  $k > 1$  möglich ist, so können wir jedoch, falls sich  $(X_t)$  bewegt, die Teilchenbewegung so wählen, daß  $\text{dist}$  durch sie um  $-1$  sinkt. Denn sind mehr als 2 Teilchen in der Konfiguration  $X_t$  auf anderen Knoten als in  $X'_t$ , so gibt es immer zwei Kanten in  $E$ , die jeweils einen der Knoten aus  $X_t$  mit einem aus  $X'_t$  verbinden:

Ist zum Beispiel  $X_t = \{v_2, v_i\}$  und  $X'_t = \{v_1, v_3\}$ , dann gibt es für  $\text{dist} = 1$ , also  $i \in \{1, 3\}$  keine Kante in  $E$ , die  $\text{dist}$  weiter reduziert. Für  $\text{dist} > 1$ , also  $i \notin \{1, 2, 3\}$ , ist jedoch immer  $\{i, 1\} \in E$ .

**Konstruktion der Kopplung.** Wir konstruieren die Folge  $(X_t^{(n)}, X'_t^{(n)})$  wie folgt für alle  $n$ : Wähle  $X'_0$  beliebig. Dann setzen wir  $X_0 := X'_0$ . Sei  $\Omega = \binom{V}{k}$  der Konfigurationsraum,  $G'_\Omega$  die Graphenstruktur und  $P'$  die Übergangsmatrix des in Abschnitt 5.1 definierten SEP-3 mit  $k$  Teilchen auf dem vollständigen Graphen  $G'$ .

Da jeder Knoten  $v \in V'_\Omega$  genau  $\deg(v) = k(n - k)$  Nachbarn hat, gilt für alle  $x, y \in \Omega$  für die Übergangsmatrix des SEP-3 auf dem vollständigen Graphen, siehe auch (4.2),

$$P'(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \text{dist}(x, y) > 1, \\ \frac{2}{n^2} & \text{falls } \text{dist}(x, y) = 1, \\ \frac{n^2 - 2k(n - k)}{n^2} & \text{falls } \text{dist}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Einen Schritt  $t \mapsto t + 1$  der Kopplung definieren wir nun folgendermaßen:

1.  $X'_{t+1}$  sei verteilt wie  $P'(X'_t, \cdot)$  und sonst unabhängig von bisher gewählten Variablen.
2. Sei  $M_t$  eine unabhängige, Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}\{M_t = 1\} = \frac{n^2 - 4k(n - k - 1) - 4h(X_t)}{n^2 - 2k(n - k)}. \quad (7.6)$$

3. Wir setzen

$$\begin{aligned} Y_1 &:= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, X'_{t+1}) = \text{dist}(X_t, X'_{t+1}) - 1\} \\ Y_2 &:= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, X'_{t+1}) = \text{dist}(X_t, X'_{t+1}), x \neq X_t\} \\ Y_3 &:= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, X'_{t+1}) = \text{dist}(X_t, X'_{t+1}) + 1\} \end{aligned}$$

Wir ziehen  $Y$  unabhängig gleichverteilt aus der ersten Menge  $Y_i$ , die nicht leer ist.

4. Wir setzen

$$X_{t+1} := \begin{cases} X_t & \text{wenn } X'_{t+1} = X'_t \text{ oder } M_t = 1, \\ Y & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.7)$$

**Bemerkung 7.6.** Die Bedeutung von  $M_t$  ist die folgende: Der SEP-3 auf  $G$  ist „träger“ als der auf  $G'$ , also  $P(x, x) > P'(x, x)$ . Es ist

$$\mathbb{P}\{M_t = 0\} = \frac{P'(x, x)}{P(x, x)}$$

und nach Konstruktion bewegt sich  $X_t$  genau dann im Schritt  $t \mapsto t + 1$ , wenn  $X'_t$  das tut und  $\{M_t = 0\}$  eintritt.

**Lemma 7.7.** Sei  $(X'_t, X_t)$  die so konstruierte Kopplung. Die Randverteilung von  $(X_t)$  ist die des in Abschnitt 5.1 definierten SEP-3 mit  $k$  Teilchen auf  $G$ .

*Beweis.* Für eine Konfiguration  $x \in \Omega$  und einen belegten Knoten  $v \in x$  bezeichnen wir mit  $h_2(x, v)$  die Anzahl seiner auf  $Z$  belegten Nachbarn. (Also beispielsweise  $x = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ ,  $h_2(x, v_3) = 1$ ,  $h_2(x, v_2) = 2$ .)

Wir stellen zunächst fest: Um in der Konfiguration  $x \in \Omega$  ein Teilchen von  $v \in x$  auf  $G$  wegzubewegen, gibt es  $n - k + h_2(x, v) - 2$  Möglichkeiten. Die Gesamtanzahl der möglichen Bewegungen aus der Konfiguration  $x$  ist also

$$\begin{aligned} \deg(x) &= \sum_{v \in x} (n - k + h_2(x, v) - 2) \\ &= k(n - k - 2) + 2h(x) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Nun bewegt sich  $(X_t)$  genau dann, wenn  $X_{t+1} := Y$  in (7.7) gesetzt wird. Also gilt mit (7.8)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_{t+1} = X_t\} &= 1 - \mathbb{P}\{X'_{t+1} \neq X'_t\} \cdot \mathbb{P}\{M_t = 0\} \\ &= 1 - \frac{n^2 - 2k(n - k)}{n^2} \cdot \frac{2k(n - k) - 4k + 4h(X_t)}{n^2 - 2k(n - k)} \\ &= 1 - \frac{2k(n - k) - 4k + 4h(X_t)}{n^2} \\ &= 1 - \frac{2}{n^2} \deg(X_t). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Dies stimmt also genau mit  $P(X_t, X_t)$  in (4.2) überein. Es bleibt zu zeigen, daß, gegeben  $X_t$ , jede Bewegung  $X_t \mapsto X_{t+1}$  gleichverteilt unter allen möglichen ist:

Dies zeigen wir für die Fälle  $Y \in Y_1$ ,  $Y \in Y_2$  und  $Y \in Y_3$  separat.

- **Fall  $Y \in Y_1$ :** Ist  $Y \in Y_1$ , so bedeutet das, daß für ein  $v \in X_t \setminus X'_{t+1}$  und  $w \in X'_{t+1} \setminus X_t$  die Kette  $(X_t)$  die Teilchenbewegung von  $v$  nach  $w$  vollzieht, die  $(X'_t)$  in der Vergangenheit vorgemacht hat. Dabei wurden  $v$  und  $w$  von  $(X'_t)$  in der „Vergangenheit“ nicht notwendigerweise im gleichen Zeitschritt, dafür aber in jedem Zeitschritt unabhängig von der Vergangenheit und voneinander von  $(X'_t)$  gewählt.
- **Fall  $Y \in Y_2$ :** Ist  $Y \in Y_2$ , so ist  $\text{dist}(X'_t, X_t) = 1$ , aber es gibt keine mögliche Bewegung, mit der  $(X_t)$  auch das letzte Teilchen zur Übereinstimmung mit  $(X'_{t+1})$  bringen kann. Das heißt mit  $v \in X_t \setminus X'_{t+1}$  und  $w \in X'_{t+1} \setminus X_t$  liegt  $(v, w)$  auf dem Kreis  $Z$ .

Daher wird  $(X_t)$  das Teilchen  $w$  auf ein beliebigen anderen freien Knoten bewegen. Da  $v$  wie in Fall 1 in der Vergangenheit von  $(X_t)$  unabhängig gewählt wurde, ist also auch die Bewegung von  $v$  nach  $w$  unabhängig, da  $(X_t)$  im aktuellen Zug  $w$  unabhängig gleichverteilt unter allen möglichen wählt.

- **Fall  $Y \in Y_3$ :** Im Fall  $Y \in Y_3$  ist  $X_t = X'_t$  und  $X_t$  vollzieht eine beliebige Teilchenbewegung, die es gleichverteilt unabhängig aus allen möglichen auswählt. Dies ist genau die Definition des SEP-3.

□

**Lemma 7.8.** Sei  $(X_t^{(n)}, X'_t^{(n)})$  die oben konstruierte Kopplung. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}\{X_t^{(n)} \neq X'_t^{(n)}\} = 0. \quad (7.10)$$

*Beweis.* Mit  $\text{dist}(t) := \text{dist}(X_t, X'_t)$  gilt

$$\mathbb{P}\{X_t^{(n)} \neq X'_t^{(n)}\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{dist}(t) = 0\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit von  $\{\text{dist}(t) = 0\}$  können wir nun mit Hilfe einer *birth-and-death*-Kette auf  $\{0, \dots, k\}$ , allen möglichen Werten von  $\text{dist}(t)$ , nach oben abschätzen: Sei  $Q$  die Übergangsmatrix der *birth-and-death*-Kette und  $\rho$  ihre stationäre Verteilung. Es ist  $\text{dist}(0) = 0$ . Die Reversibilität der Kette garantiert uns nun, daß, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten  $Q(i, i+1)$  überschätzen und  $Q(i, i-1)$  unterschätzen,  $\rho(0)$  höchstens kleiner wird: Formal ist, wenn für alle jeweils gültigen Werte von  $i$

$$Q(i, i+1) \geq \mathbb{P}\{\text{dist}(t+1) = i+1 \mid \text{dist}(t) = i\} \quad \text{und} \quad (7.11)$$

$$Q(i, i-1) \leq \mathbb{P}\{\text{dist}(t+1) \leq i-1 \mid \text{dist}(t) = i\} \quad (7.12)$$

gilt,

$$\mathbb{P}\{\text{dist}(t) = 0\} \geq \rho(0).$$

Wählen wir also im folgenden  $Q$  so, daß (7.11) und (7.12) gilt. Zunächst berechnen wir dazu die rechten Seiten dieser Ungleichungen. Wir analysieren zunächst, wie der Teilschritt 1 der Kopplung  $\text{dist}$  beeinflußt und dann, wie die Teilschritte 2–4 das tun.

Nach Bemerkung 7.6 ändert sich  $\text{dist}$  höchstens dann, wenn  $X'_t$  sich bewegt. Dieses Ereignis bezeichnen wir mit

$$A := \{X'_{t+1} \neq X'_t\},$$

und setzen es für die Analyse als gegeben voraus. Gegeben  $A$  bewegt sich  $X_t$ , wenn

$$M := \{M_t = 0\}$$

eintritt.

- **Analyse von Teilschritt 1:** Im Teilschritt 1 von  $t \mapsto t+1$  der Kopplung wird  $X'_{t+1}$  bestimmt: Es bewegt sich ein Teilchen von  $v$  nach  $w$  und es ist  $d_1 \in \{-1, 0, 1\}$  mit

$$d_1 := \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) - \text{dist}(X'_t, X_t).$$

Nach Definition des SEP-3 (gegeben  $M$ ) ist  $v$  gleichverteilt auf  $X'_t$  und  $w$  gleichverteilt auf  $V \setminus X'_t$ , und  $v$  und  $w$  sind unabhängig. Wir unterscheiden also:

- **Fall 1:**  $d_1 = -1$ . Dieser Fall tritt ein, wenn  $v \in X'_t \setminus X_t$  und  $w \in X_t \setminus X'_t$ : In diesem unwahrscheinlichen Fall hat  $(X'_t)$  sich  $(X_t)$  von selbst genähert. Es ist

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \{ \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i - 1 \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i, A \} \\ &= \mathbb{P} \{ v \in X'_t \setminus X_t \} \cdot \mathbb{P} \{ w \in X_t \setminus X'_t \} \\ &= \frac{i}{k} \cdot \frac{i}{n-k} =: c_1(n, k, i) \end{aligned}$$

- **Fall 2:**  $d_1 = +1$ . Dieser Fall tritt ein, wenn  $v \in X'_t \cap X_t$  und  $w \in V \setminus (X'_t \cup X_t)$ :  $(X'_t)$  entfernt sich von  $(X_t)$ . Da  $w \in X'_t$  nach Definition von  $w$  ausgeschlossen ist, gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \{ \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i + 1 \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i, A \} \\ &= \mathbb{P} \{ v \in X'_t \cap X_t \} \cdot \mathbb{P} \{ w \in V \setminus (X_t \setminus X'_t) \} \\ &= \frac{k-i}{k} \cdot \frac{n-k-i}{n-k} = 1 - \frac{i(n-i)}{k(n-k)} =: c_2(n, k, i). \end{aligned}$$

- **Fall 3:**  $d_1 = 0$ .  $(X'_t)$  bewegt sich so, daß es sich weder von  $(X_t)$  entfernt noch sich ihm nähert. Er ergibt sich als Komplement von Fall 1 und 2:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \{ \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i, A \} \\ &= 1 - \frac{i^2 + (k-i)(n-k-i)}{k(n-k)} = \frac{i(n-2i)}{k(n-k)} =: c_3(n, k, i). \end{aligned}$$

- **Analyse von Teilschritt 2–4:** In den Teilschritten 2–4 von  $t \mapsto t+1$  wird  $X_{t+1}$  bestimmt. Mit  $\mathbb{P}\{M_t = 0\}$  bewegt  $(X_t)$  ein Teilchen von  $v$  nach  $w$ . Dabei versucht es, sich  $(X'_t)$  zu nähern, sofern dies geht (Menge  $Y_1$ ), die Entfernung zu halten (Menge  $Y_2$ ), oder muß sich sonst entfernen (Menge  $Y_3$  — Dies tritt nur ein, wenn  $X'_{t+1} = X_t$ , aber  $M_t = 0$  ist.). Wir betrachten

$$d_2 := \text{dist}(X_{t+1}, X'_{t+1}) - \text{dist}(X_t, X'_{t+1}),$$

und unterscheiden  $d_2 \in \{-1, 0, 1\}$ :

- **Fall 1:**  $d_2 = -1$ . Dieser Fall tritt ein, wenn  $Y_1$  nicht leer ist,  $(X_t)$  sich also  $(X'_t)$  nähern kann. Dies ist nicht möglich, wenn sich  $X_t$  und  $X'_{t+1}$  nicht unterscheiden. Unterscheiden sie sich in genau einer Teilchenposition,  $v \in X_t \setminus X'_{t+1}$  und  $w \in$

7. Auf  $(n - 3)/2$  disjunkten Eulerzyklen

---

$X'_{t+1} \setminus X_t$ , so eine Annäherung ebenfalls nicht möglich, falls sie auf dem Kreis,  $\{v, w\} \in Z$ , stattfinden müßte. Es ist also

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \{ \text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) = i - 1 \mid \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i, A, M \} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \\ 1 - \mathbb{P}\{\{v, w\} \in Z\} & \text{falls } i = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei hängt  $\mathbb{P}\{\{v, w\} \in Z\}$  von der Konfiguration  $X_t$  ab: Von den insgesamt  $n(n - k)$  Teilchenbewegungen, die aus der Konfiguration  $X_t$  möglich sind, liegen  $2k - 2h(X_t)$  in  $Z$ :

$$\mathbb{P}\{\{v, w\} \in Z\} = \frac{2k - 2h(X_t)}{n(n - k)}$$

- **Fall 2:**  $d_2 = +1$ . ( $X_t$ ) wird sich nur dann entfernen, wenn  $X_t$  mit  $X'_{t+1}$  bereits übereinstimmt und sich ( $X_t$ ) aber bewegen muß, da  $\{M_t = 0\}$  eingetreten ist:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \{ \text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) = i + 1 \mid \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i, A, M \} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Fall 3:**  $d_2 = 0$ . ( $X_t$ ) hält die Entfernung. Der Fall ist komplementär zu Fall 1 und 2:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \{ \text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) = i \mid \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i, A, M \} \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}\{\{v, w\} \in Z\} & \text{falls } i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Fassen wir also zusammen: In Teilschritt 1 wird

$$d_1 = \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) - \text{dist}(X'_t, X_t) \in \{-1, 0, 1\}$$

gemäß einer Verteilung gewählt, die von  $X_t$  und  $X'_t$  abhängt. In den Teilschritten 2-4 wird entsprechend

$$d_2 = \text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) - \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) \in \{-1, 0, 1\}$$

gewählt. Durch Verkettung ergibt sich

$$\Delta := d_1 + d_2 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Der Fall  $\Delta = 2$  tritt dabei nicht auf, da  $\mathbb{P}\{d_2 = 1 \mid d_1 = 1\} = 0$  ist.

Im Fall  $\Delta = -2$  lassen wir die *birth-and-death*-Kette trotzdem nur einen Schritt machen, also dasselbe wie im Fall  $\Delta = -1$ .

Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}\{\text{dist}(t+1) = i+1 \mid \text{dist}(t) = i\} \\
 &= \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i\} \\
 &\quad \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) = i+1 \mid \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i\} \\
 &+ \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i+1 \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i\} \\
 &\quad \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) = i+1 \mid \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i+1\} \\
 &= \mathbb{P}(A)c_3(n, k, i)\mathbb{P}(M)\mathbf{1}_{i=0} \\
 &+ \mathbb{P}(A)c_2(n, k, i)\left(\mathbb{P}(M)\mathbf{1}_{i=0}\frac{2k-2h(X_t)}{n(n-k)} + \mathbb{P}(M^c)\right) \\
 &= \mathbb{P}(A)c_3(n, k, i)\mathbb{P}(M)\mathbf{1}_{i=0} \\
 &+ \mathbb{P}(A)c_2(n, k, i)\left(1 - \mathbb{P}(M)\left(1 - \mathbf{1}_{i=0}\frac{2k-2h(X_t)}{n(n-k)}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
 c_4(n, k) &:= \frac{n^2 - 4k(n-k-1) - 4(k-1)}{n^2 - 2k(n-k)}, \\
 c_5(n, k) &:= \frac{n^2 - 4k(n-k-1)}{n^2 - 2k(n-k)}, \\
 c_6(n, k) &:= \mathbb{P}(A) = \frac{2k(n-k)}{n^2}, \\
 c_7(n, k) &:= \frac{2k}{n(n-k)},
 \end{aligned}$$

dann gilt nach (7.5) und (7.6)

$$c_4(n, k) \leq M_t \leq c_5(n, k). \quad (7.13)$$

Damit definieren wir  $Q(i, i+1)$  für alle gültigen Werte von  $i$  genau so, daß (7.11) erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}\{\text{dist}(t+1) = i+1 \mid \text{dist}(t) = i\} \\
 & \leq c_6(n, k)c_3(n, k, i)c_5(n, k)\mathbf{1}_{i=0} \\
 & \quad + c_6(n, k)c_2(n, k, i)(1 - c_4(n, k)(1 - \mathbf{1}_{i=0}c_7(n, k))) \\
 & =: Q(i, i+1).
 \end{aligned}$$

Entsprechend setzen wir  $Q(i, i - 1)$  als untere Schranke der rechten Seite von (7.12):

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}\{\text{dist}(t + 1) \leq i - 1 \mid \text{dist}(t) = i\} \\
 &= \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i - 1 \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i\} \\
 &\quad \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) \neq i \mid \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i - 1\} \\
 &+ \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i\} \\
 &\quad \mathbb{P}\{\text{dist}(X'_{t+1}, X_{t+1}) = i - 1 \mid \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i\} \\
 &= \mathbb{P}(A)c_1(n, k, i)(1 - \mathbb{P}(M_t)\mathbf{1}_{i=1}) \\
 &\quad + \mathbb{P}(A)c_3(n, k, i)\left(\mathbf{1}_{i>1} + \mathbf{1}_{i=1}\left(1 - \frac{2k - 2h(X_t)}{n(n - k)}\right)\right) \\
 &\geq c_6(n, k)c_1(n, k, i)(1 - c_5(n, k)\mathbf{1}_{i=1}) \\
 &\quad + c_6(n, k)c_3(n, k, i)(\mathbf{1}_{i>1} + \mathbf{1}_{i=1}(1 - c_7(n, k))) \\
 &=: Q(i, i - 1)
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Und schließlich setzen wir  $Q(i, j) := 0$  für  $j \notin \{i - 1, i, i + 1\}$  und

$$Q(i, i) := 1 - \sum_{j \neq i} Q(i, j).$$

Nun lösen wir das Gleichungssystem  $\rho'(I - Q) = 0$ ,  $\rho' \neq 0$ : Dazu setzen wir zunächst

$$\rho'(0) := a.$$

Dann folgt, wenn wir die Abhängigkeit der  $c_i$  von  $n$  und  $k$  in der Notation weglassen und  $c_6$  aus allen Brüchen kürzen, für  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ :

$$\begin{aligned}
 \rho'(1) &= \frac{Q(0, 1)}{Q(1, 0)}\rho'(0) \\
 &= \frac{c_3(0)c_5 + c_2(0)(1 - c_4(1 - c_7))}{c_1(1)(1 - c_5) + c_3(1)(1 - c_7)}a \\
 \rho'(i + 1) &= \frac{Q(i, i + 1)}{Q(i + 1, i)}\rho'(i) \\
 &= \frac{c_2(i)(1 - c_4)}{c_1(i) + c_3(i)}\rho'(i)
 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$  gilt nach der Definition der Landau-Symbole  $\mathcal{O}$  und  $\Omega$  sowie der Definition der  $c_i$

$$\begin{aligned}
 \rho'(1) &= \frac{\mathcal{O}(k_n^2 n^4)}{\Omega((n - k_n)n^4)}a \\
 \rho'(i + 1) &= \frac{\mathcal{O}(k_n^2 n^2)}{\Omega((n - k_n)^2 n)}\rho'(i) \quad \text{für } i \geq 1
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

und nach Normalisierung

$$\rho(x) := \frac{\rho'(x)}{\sum_{y \in \Omega} \rho'(y)}$$

daher dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(0) = 1, \quad (7.16)$$

und somit die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 7.9.** Daß für unser Modell

$$\mathbb{P}\{\Delta = 2\} = \mathbb{P}\{\text{dist}(t+1) = i+2 \mid \text{dist}(t) = i\} = 0$$

gilt, ist essentiell für das Beweisverfahren, da *birth-and-death*-Ketten keine „Doppelschritte“ zulassen. Den Fall  $\Delta = -2$ , der eigentlich ebenfalls einen Doppelschritt erfordert hätte, kann als Einzelschritt wie  $\Delta = 1$  abgebildet werden, da  $\rho(0)$  dadurch höchstens kleiner wird.

**Bemerkung 7.10.** Unter den im Beweis getroffenen Abschätzungen ist die Voraussetzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$$

so allgemein wie möglich, siehe (7.15).

**Lemma 7.11.** *Sei  $(X'_t, X_t)$  die oben konstruierte Kopplung. Ist  $P$  die Übergangsmatrix von  $(X_t)$  und  $P'$  die von  $(X'_t)$ , so gilt für alle  $t \in \mathbb{N}$  und  $x, y \in \Omega$  mit  $x \neq y$*

$$P^t(x, y) \leq P'^t(x, y).$$

*Beweis.* Da Nachbarn in  $G'_\Omega$  auch immer Nachbarn in  $G_\Omega$  sind, zeigt (4.2) die Behauptung für  $t = 1$ . Per Induktion folgt die Behauptung für alle  $t$ .  $\square$

*Beweis von Theorem 7.1.* Sei  $(X_t^{(n)}, X_t^{(n)})$  die oben konstruierte Folge von Kopplungen. Nach Konstruktion ist  $(X_t^{(n)})$  der SEP-3 auf  $G'$  und nach Lemma 7.7 ist  $(X_t^{(n)})$  der SEP-3 auf  $G$ .

Die stationären Verteilungen von  $(X_t)$  und  $(X'_t)$  sind identisch, nämlich die Gleichverteilungen auf dem gleichen Zustandsraum (siehe Lemma 4.1), wir bezeichnen sie mit  $\pi$ . Bezeichne  $\mu_t^{(n)}$  die Randverteilung von  $X_t^{(n)}$  und  $d^{(n)}(t)$  ihre *total variation distance* zu  $\pi$ , sowie  $\mu_t'^{(n)}$  und  $d'^{(n)}(t)$  entsprechend von  $X_t'^{(n)}$ .

Da  $X'_0$  in der Konstruktion der Kopplung beliebig gewählt wurde, können wir oBdA annehmen, daß es so gewählt wurde, daß es genau das  $x$  ist, für das das Maximum in der Definition (3.2) von  $d(t)$  angenommen wurde. Damit stimmt also  $d(t)$  mit der dortigen Definition überein. Da  $G'_\Omega$  transitiv ist, stimmt nach (4.3) auch  $d'(t)$  für dieses  $x$  mit der Definition (3.2) überein.

Mit diesen Notationen folgt aus Lemma 7.11

$$d'(t) \leq d(t). \quad (7.17)$$

Nach Lemma 7.8 können wir ein  $\epsilon : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  wählen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$ , so daß

$$\mathbb{P}\{X_t^{(n)} \neq X_t'^{(n)}\} \leq \epsilon(n)$$

gilt. Damit folgt nach (3.1)

$$\left\| \mu_t^{(n)} - \mu_t^{(n)} \right\|_{\text{TV}} \leq \epsilon(n),$$

und nach der Dreiecksungleichung

$$\left\| \mu_t^{(n)} - \pi \right\|_{\text{TV}} \leq \left\| \mu_t^{(n)} - \mu_t^{(n)} \right\|_{\text{TV}} + \left\| \mu_t^{(n)} - \pi \right\|_{\text{TV}}$$

schließlich

$$d^{(n)}(t) \leq \epsilon(n) + d^{(n)}(t). \quad (7.18)$$

Mit (7.17) und (7.18) folgt nach Theorem 5.10 die Behauptung.  $\square$

## 7.4. Mögliche Verallgemeinerungen

Lemma 7.8 gilt in seiner oben dargestellten Fassung nur unter der Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$ . Wir vermuten, daß die Aussage von Theorem 7.1 auch für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} > 0$  gilt. Im Beweis von Lemma 7.8 wurden an mehreren Stellen grobe Abschätzungen getroffen, deren Verbesserungen eventuell eine Verallgemeinerung des Theorems zulassen würden:

- Es gilt

$$\mathbb{P} \{ \text{dist}(t+1) = i-2 \mid \text{dist}(t) = i \} > 0,$$

das heißt, tatsächlich verbessert sich  $\text{dist}$  durchaus in einer Zeiteinheit um 2. In unserer Abschätzung vollzieht die *birth-and-death*-Kette jedoch nur einen Schritt der Größe  $-1$ . Um Schritte der Länge größer 1 zuzulassen, müßte das Modell *birth-and-death*-Kette ersetzt werden. Da der andere Faktor in (7.14),

$$\mathbb{P} \{ \text{dist}(X'_{t+1}, X_t) = i-1 \mid \text{dist}(X'_t, X_t) = i \},$$

jedoch nur für große  $i$  relevant wird, für die aber natürlich  $\pi(i) \ll \pi(0)$  gilt, sind die Verbesserungsmöglichkeiten hier wohl gering.

- Die Abschätzung (7.5),  $0 \leq h(x) \leq k-1$ , ist extrem grob, und somit auch die von  $M_t$  in (7.13),  $c_4 \leq M_t \leq c_5$ , sowie die von  $\mathbb{P}\{e \in Z\} \leq c_7$ . Anschaulich gehen wir mit dieser Abschätzung immer vom jeweiligen ungünstigsten Fall von  $X_t$  aus:

Bei  $0 \leq h(x)$  gehen wir, bis auf Isomorphie, von der Situation

$$X'_t = \{v_1, v_3, \dots, v_{2k_n+1}\}$$

aus, und damit ist unsere Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, daß  $(X'_t)$  eine Bewegung entlang des Kreises  $Z$  macht, die  $(X_t)$  nicht nachmachen kann, meistens unnötig hoch, vor allem für große  $k_n$ .

Bei  $h(x) \leq k-1$  gehen wir, wieder bis auf Isomorphie, von der Situation

$$x = \{v_1, v_2, \dots, v_{k_n}\}$$

aus, und damit ist unsere Abschätzung der Wahrscheinlichkeit, daß  $(X_t)$  sich überhaupt bewegt, meistens unnötig klein.

Eine Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen  $h(x)$  und  $\text{dist}$ , der Position der *birth-and-death*-Kette, ist uns jedoch zumindest nicht bekannt: Die beiden extremen Ereignisse  $\{h(x) = 0\}$  und  $\{h(x) = x - 1\}$  können sowohl gegeben  $\{\text{dist} = k_n\}$  als auch gegeben  $\{\text{dist} = 0\}$  sowohl eintreten als auch nicht eintreten. Damit müssen wir bei einer Projektion auf ein niedrig-dimensionaleres Modell, wie hier bei der *birth-and-death*-Kette, zunächst vom ungünstigsten Fall ausgehen.

Um ein besseres Ergebnis zu erzielen, müßten wir also auch in diesem Fall das Modell der *birth-and-death*-Kette durch ein anderes, etwa

$$M_2 := \{(\text{dist}, h(x))\} = (\mathbb{Z}/(k_n + 1)\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/(k_n - 1)\mathbb{Z}) \quad (7.19)$$

ausgetauscht werden.

Ob bei der Projektion eine Abschätzung, etwa des Falls  $\mathbb{E}(\text{dist})$  anstatt dem ungünstigsten zulässig wäre, ist uns nicht klar.

Im Allgemeinen geht bei einem Modell mit  $d \geq 2$  Dimensionen durch die unterschiedlichen Abschätzungen in Richtungen verschiedener Dimensionen die Reversibilität verloren. Damit wäre das initiale Argument im Beweis von Lemma 7.8, nämlich daß bei gegebener Reversibilität eine Vergrößerung von  $Q(i, i + 1)$  sowie eine Verkleinerung von  $Q(i, i - 1)$  den Wert von  $\rho(0)$  erniedrigen, hinfällig.



## 8. Ausblick

Wir haben bei der Untersuchung des *simple exclusion process* auf dem vollständigen Graphen gesehen, daß sowohl die Spektrallücke als auch die logarithmische Sobolev-Konstante Schranken an die Mischzeit liefern, die zwar für  $n \rightarrow \infty$  gut sind, aber im Bereich der Cutoff-Position zu grob, als daß wir eine Aussage über das Auftreten oder das Nicht-Auftreten des Cutoff-Phänomens treffen könnten.

Wir haben für den vollständigen Graphen gesehen, daß, während sich die Position des Cutoff bezüglich der *total variation distance* mit unterschiedlichen Größenordnungen von  $k_n$  gegenüber  $\sqrt{n}$  plötzlich anders verhält ( $\frac{1}{2}n \log \min(\sqrt{n}, k_n)$ ), die Position des Cutoff bezüglich der *separation distance* kontinuierlich verschiebt (etwa bei  $\frac{1}{2}n(\gamma + \log \frac{nk_n}{n-k_n})$ , wobei  $\gamma \approx 0,577$  die Euler-Mascheroni-Konstante ist).

Ist  $k$  klein gegenüber  $n$ , treten beide Arten von Cutoff fast an der gleichen Position auf. Für  $k = \frac{n}{2}$  ist die Position des Cutoff bezüglich der *separation distance* fast doppelt so groß wie die des Cutoff bezüglich *total variation distance*. Dies wirft natürlich die beispielsweise in [35] formulierte Frage auf, ob Cutoff bezüglich *separation distance* genau dann auftritt, wenn Cutoff bezüglich der *total variation distance* auftritt, wie das für *birth-and-death*-Ketten nach den Sätzen 3.13 und 3.14 der Fall ist.

Wir haben weiterhin für den bis auf einen Eulerzyklus vollständigen Graphen für

$$r := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\sqrt{n}} = 0$$

gezeigt, daß Cutoff bezüglich der *total variation distance* auftritt. Da unsere Beweismethode für  $r > 0$  versagt, stellt sich die Frage nach einer Alternative, da wir davon ausgehen, daß die Behauptung auf für  $r > 0$  zutrifft. Läßt sich die in Kapitel 7 entwickelte Beweismethode, die Entfernung der zwei Zufallsvariablen einer Kopplung mit Hilfe einer *birth-and-death*-Kette auch auf Fälle übertragen, bei denen die Variablen weniger Gemeinsamkeiten aufweisen?

Richtig interessant ist die Frage, was passiert, wenn wir aus einer Partitionierung der Kanten des vollständigen Graphen in Eulerzyklen  $i > 1$  Zyklen entfernen. Wir haben gezeigt, daß bei  $i = 1$  Cutoff bezüglich der *total variation distance* an der gleichen Stelle wie für  $i = 0$  auftritt.

Satz 3.16 besagt jedoch, daß wenn  $n$  ungerade ist, spätestens bei  $i = \frac{n-3}{2}$  kein Cutoff mehr auftritt. Was passiert für  $1 < i < \frac{n-3}{2}$ ? Verschiebt sich die Cutoff-Position, verändert sich die -Intervalllänge?

Da sich für ungerades  $n$  zwei Eulerzyklen versetzt als  $(v_1, v_2, v_3, \dots)$  und  $(v_1, v_3, v_5, \dots)$  anordnen lassen, und so die grobe Struktur des entstandenen Graphens einen (doppelten)

Kreis darstellt, liegt die Vermutung nahe, daß zumindest in diesem Fall ( $i = \frac{n-5}{2}$ ) kein Cutoff auftritt.

Das Cutoff-Phänomen wirft also weiterhin viele Fragen auf. Auch wenn eine hohe Multiplizität des zweitgrößten Eigenwertes einen Hinweis auf sein Vorkommen geben kann, ist es uns unklar, was für Bedingungen an das Modell, sprich die Übergangswahrscheinlichkeiten zu stellen sind.

# Literaturverzeichnis

- [1] David Aldous and Persi Diaconis. Shuffling Cards and Stopping Times. *The American Mathematical Monthly*, 93:333–348, 1986.
- [2] David Aldous and James A. Fill. *Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs*. 1994–2002. Monograph in preparation.
- [3] Sergey Bobkov and Friedrich Götze. Exponential Integrability and Transportation Cost Related to Logarithmic Sobolev Inequalities. *Journal of Functional Analysis*, 163:1–28, 1999.
- [4] Sergey Bobkov and Friedrich Götze. Concentration of Empirical Distribution Functions with Applications to non-i.i.d. Models. *Bernoulli*, 16:1385–1414, 2010.
- [5] Sergey Bobkov and Prasad Tetali. Modified Log-Sobolev Inequalities, Mixing and Hypercontractivity. In *Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '03, pages 287–296. ACM, 2003.
- [6] Pierre Brémaud. *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. Springer, 1999.
- [7] Pietro Caputo, Thomas M. Liggett, and Thomas Richthammer. Proof of Aldous' Spectral Gap Conjecture. *Journal of the American Mathematical Society*, 23:831–851, 2010.
- [8] Guan-Yu Chen. *The Cutoff Phenomenon for Finite Markov Chains*. PhD thesis, Cornell University, 2006.
- [9] Guan-Yu Chen, Yang-Jen Fang, and Yuan-Chung Sheu. The Cutoff Phenomenon for Ehrenfest Processes. 2011. preprint.
- [10] Guan-Yu Chen and Laurent Saloff-Coste. The Cutoff Phenomenon for Ergodic Markov Processes. *Electronic Journal of Probability*, 13:26–78, 2008.
- [11] Persi Diaconis. The Cutoff Phenomenon in Finite Markov Chains. In *Proceedings of The National Academy of Sciences*, volume 93, pages 1659–1664, 1996.
- [12] Persi Diaconis and James A. Fill. Strong Stationary Times via a New Form of Duality. *The Annals of Probability*, 18:1483–1522, 1990.
- [13] Persi Diaconis and Laurent Miclo. On Times to Quasi-stationarity for Birth and Death Processes. *Journal of Theoretical Probability*, 22:558–586, 2009.

- [14] Persi Diaconis and Laurent Saloff-Coste. Comparison Theorems for Reversible Markov Chains. *The Annals of Applied Probability*, 3, 1993.
- [15] Persi Diaconis and Laurent Saloff-Coste. Logarithmic Sobolev Inequalities for Finite Markov Chains. *The Annals of Applied Probability*, 6:695–750, 1996.
- [16] Persi Diaconis and Laurent Saloff-Coste. Nash Inequalities for Finite Markov Chains. *Journal of Theoretical Probability*, 9:459–510, 1996.
- [17] Persi Diaconis and Laurent Saloff-Coste. Separation Cut-offs for Birth and Death Chains. *The Annals of Applied Probability*, 16:2098–2122, 2006.
- [18] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. Generating a Random Permutation with Random Transpositions. *Probability Theory and Related Fields*, 57:159–179, 1981.
- [19] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. Time to Reach Stationarity in the Bernoulli-Laplace Diffusion Model. *SIAM J. Math. Anal.*, 18:208–218, January 1987.
- [20] Persi Diaconis and Daniel Stroock. Geometric Bounds for Eigenvalues of Markov Chains. *The Annals of Applied Probability*, 1:36–61, 1991.
- [21] Jian Ding, Eyal Lubetzky, and Yuval Peres. Total Variation Cutoff in birth-and-death Chains. *Probability Theory and Related Fields*, 146:61–85, 2010.
- [22] Peter Donnelly, Peter Lloyd, and Aidan Sudbury. Approach to Stationarity of the Bernoulli-Laplace Diffusion Model. *Advances in Applied Probability*, 26:715–727, 1994.
- [23] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. John Wiley & Sons, third edition, 1968.
- [24] James A. Fill. On Hitting Times and Fastest Strong Stationary Times for Skip-Free and More General Chains. *Journal of Theoretical Probability*, 22:587–600, 2009.
- [25] James A. Fill. The Passage Time Distribution for a Birth-and-Death Chain: Strong Stationary Duality Gives a First Stochastic Proof. *Journal of Theoretical Probability*, 22:543–557, 2009.
- [26] Akihito Hora. The Cut-off Phenomenon for Random Walks on Hamming Graphs with Variable Growth Conditions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 33:695–710, 1997.
- [27] Mark Jerrum. *Counting, Sampling and Integrating: Algorithms and Complexity*. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [28] Samuel Karlin and James L. McGregor. The Hahn Polynomials, Formulas and an Application. *Scripta Mathematica*, 26, 1961.
- [29] Brendan D. Kay and Robert W. Robinson. Asymptotic Enumeration of Eulerian Circuits in the Complete Graph. *Combinatorics, Probability and Computing*, 7:437–449, 1998.
- [30] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, 2008.

- [31] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 4. Addison-Wesley, 2011.
- [32] Wolfram Koepf. *Hypergeometric Summation*. Vieweg Verlag, 1998.
- [33] Bernhard Korte and Jens Vygen. *Combinatorial Optimization*. Springer, second edition, 2002.
- [34] Hubert Lacoin and Remi Leblond. Cutoff Phenomenon for the Simple Exclusion Process on the Complete Graph. 2010.
- [35] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2009.
- [36] Thomas M. Liggett. Coupling the Simple Exclusion Process. *The Annals of Probability*, 4:339–356, 1976.
- [37] Thomas M. Liggett. *Interacting Particle Systems*, volume 276 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1985.
- [38] Jun S. Liu. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. Springer, 2001.
- [39] Eyal Lubetzky and Allan Sly. Cutoff for the Ising Model on the Lattice. 2009.
- [40] Eyal Lubetzky and Allan Sly. Cutoff Phenomena for Random Walks on Random Regular Graphs. *Duke Mathematical Journal*, 153(3):475–510, June 2010.
- [41] Ben Morris. The Mixing Time for Simple Exclusion. *The Annals of Applied Probability*, 16:615–635, 2006.
- [42] Ben Morris. Spectral Gap for the Interchange Process in a Box. *Electronic Communications in Probability*, 13:311–318, 2008.
- [43] Ben Morris and Alistair Sinclair. Random Walks on Truncated Cubes and Sampling 0-1 Knapsack Solutions. In *Proceedings of the 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 230–240. IEEE Computer Society, 1999.
- [44] Yuval Peres. American Institute of Mathematics research workshop „Sharp Thresholds for Mixing Times“ (Palo Alto), 2004. Zusammenfassung siehe <http://www.aimath.org/WWN/mixingtimes>.
- [45] Jeremy Quastel. Diffusion of Color in the Simple Exclusion Process. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45:623–679, 1992.
- [46] Laurent Saloff-Coste. Lectures on Finite Markov Chains. In *Lectures on Probability Theory and Statistics*, volume 1665 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 301–413. Springer, 1997.
- [47] Laurent Saloff-Coste. Random Walks on Finite Groups. In *Probability on Discrete Structures*, volume 110 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, pages 263–346. Springer, 2004.
- [48] Horng-Tzer Yau. Logarithmic Sobolev Inequality for Generalized Simple Exclusion Process. *Probability Theory and Related Fields*, 109:507–538, 1997.